2004,**24A**(4):464－468

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

de Sitter 空间中法联络平坦的完备类空子流形*

[1,2] 舒世昌 [1] 刘三阳

([1] 西安电子科技大学应用数学系 西安 710071；[2] 陕西咸阳师范学院数学系 咸阳 712000)

摘要：该文证明了 de Sitter 空间中具有平行平均曲率向量的常数量曲率完备类空子流形，如果其法联络是平坦的，且 M 的截面曲率小于 0，或 M 的第二基本形式模长平方 $\|\sigma\|<\frac{n^2H^2}{n-1}-2c$ 时，M 是全脐点子流形.

关键词：de Sitter 空间；法联络；类空子流形；第二基本张量.

MR(2000)主题分类：53C40　　**中图分类号**：O186.16　　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2004)04-464-05

1 引言

设 M 是 de Sitter 空间 $S_1^{n+1}(c)$ 中具常平均曲率的 n 维完备类空超曲面，K. Akuta- gawa[1] 证得：若 $H^2\leqslant c, n=2; n^2H^2<4(n-1)c, n\geqslant 3$，则 M 是全脐超曲面. Q. M. Cheng[2] 将上述结果推广到 de Sitter 空间 $S_p^{n+p}(c)$ 中具平行平均曲率向量的完备类空子流形的情况，得到：若 $H^2\leqslant c, n=2; n^2H^2<4(n-1)c, n\geqslant 3$ 则 M 是全脐点子流形. U-Hang KI[3] 证明了若 M 是 $S_1^{n+1}(c)$ 的常平均曲率的 n 维完备类空超曲面，如果 $H^2>c, n=2$ 或 $n^2H^2\geqslant 4(n-1)c$，$n\geqslant 3$ 时，则 M 的第二基本形式模长平方上有界，即 $\|\sigma\|^2\leqslant S_+(1)$. 作者在文[4]中证明了若 M 是 de Sitter 空间 $S_p^{n+p}(c)$ 中具平行平均曲率向量的 n 维完备类空子流形，若 $H^2>c$，(此时蕴含 $n^2H^2>4(n-1)c$)，则 M 的第二基本形式模长平方也是上有界的，即

$$\|\sigma\|^2\leqslant S_+(p)+(p-1)H\{nH+\sqrt{n(n-1)[S_+(1)-nH^2]}\},$$

其中

$$S_+(p)=-pnc+\frac{n}{2(n-1)}\{n^2H^2+(n-2)H\sqrt{n^2H^2-4(n-1)c}\}.$$

Y. F. Zheng[5] 中证明了：设 M 是 de Sitter 空间 $S_1^{n+1}(c)$ 的 n 维紧致常数量曲率类空超曲面，若 M 的截面曲率 $K(M)\geqslant 0, R<c$ 则 M 等距于一个球面.

本文假定 M 是 de Sitter 空间 $S_p^{n+p}(c)$ 中具平行平均曲率向量的常数量曲率完备类空子流形，我们得到

定理 1 M 是 de Sitter 空间 $S_p^{n+p}(c)$ 中具有平行平均曲率向量的常数量曲率 n 维完备类空子流形，如果 M 在 $S_p^{n+p}(c)$ 中的法联络是平坦的，且截面曲率 $K(M)<0$，则 M 是全脐

收稿日期：2001-07-23

* 基金项目：国家自然科学基金(69972036)、陕西省自然科学基金(2003A02)和陕西省教育厅自然科学基金(03JK215)资助

点子流形.

定理 2 设 M 是 de Sitter 空间 $S_p^{n+p}(c)$中具平行平均曲率向量的常数量曲率 n 维完备类空子流形,如果 M 在 $S_p^{n+p}(c)$中的法联络是平坦的,且

$$\|\sigma\|^2 < \frac{n^2H^2}{n-1} - 2c,$$

则 M 是全脐点子流形. $\|\sigma\|^2$ 是 M 的第二基本形式模长平方. H 是平均曲率.

2 基本公式

设 M 是 de Sitter 空间 $S_p^{n+p}(c)$的 n 维类空子流形,选取适当的局部规范正交标架 e_1,$e_2,\cdots,e_{n+p}$,使得 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 切于 M. 我们将使用以下的求和指标约定,$1\leqslant A,B,C,\cdots,\leqslant n+p$;$1\leqslant i,j,k,\cdots,\leqslant n$; $n+1\leqslant \alpha,\beta,\gamma,\cdots,\leqslant n+p$. 并约定在求和号下重复的指标是指在相应范围求和. 设 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n+p}$是对偶标架,$S_p^{n+p}(c)$的结构方程为

$$d\omega_A = -\sum \varepsilon_B\omega_{AB}\Lambda\omega_B,\ \omega_{AB}+\omega_{BA}=0, \tag{2.1}$$

$$d\omega_{AB} = -\sum \varepsilon_C\omega_{AC}\Lambda\omega_{CB} - \frac{1}{2}\varepsilon_C\varepsilon_D K_{ABCD}\omega_C\Lambda\omega_D, \tag{2.2}$$

$$K_{ABCD} = c\varepsilon_A\varepsilon_B(\delta_{AD}\delta_{BC}-\delta_{AC}\delta_{BD}), \tag{2.3}$$

这里 $\varepsilon_i=1$,$\varepsilon_\alpha=-1$,限制在 M 上

$$\omega_\alpha = 0, \tag{2.4}$$

$$d\omega_i = -\sum \omega_{ij}\Lambda\omega_j,\ \omega_{ij}+\omega_{ji}=0, \tag{2.5}$$

$$d\omega_{ij} = -\sum \omega_{ik}\Lambda\omega_{kj} - \frac{1}{2}\sum R_{ijkk}\omega_k\Lambda\omega_l, \tag{2.6}$$

Gauss 公式为

$$R_{ijkl} = c(\delta_{il}\delta_{jk}-\delta_{ik}\delta_{jl}) - \sum(h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha - h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha), \tag{2.7}$$

因此,截面曲率为

$$K(e_i,e_j) = -R_{ijij} = R_{ijji},$$

$$R_{ij} = c(n-1)\delta_{ij} - \sum h_{ij}^\alpha h_{kk}^\alpha + \sum h_{ik}^\alpha h_{kj}^\alpha, \tag{2.8}$$

$$R = n(n-1)c - n^2H^2 + \|\sigma\|^2, \tag{2.9}$$

R 是 M 的数量曲率. 我们还有

$$d\omega_{\alpha\beta} = -\sum \omega_{\alpha\gamma}\Lambda\omega_{\gamma\beta} - \frac{1}{2}\sum R_{\alpha\beta ij}\omega_i\Lambda\omega_j, \tag{2.10}$$

$$R_{\alpha\beta ij} = -\sum(h_{il}^\alpha h_{jl}^\beta - h_{jl}^\alpha h_{il}^\beta),$$

M 的第二基本形式记为 $\alpha = -\sum h_{ij}^\alpha\omega_i\omega_j e_\alpha$,平均曲率向量 $h = -\dfrac{1}{n}\sum(\sum h_{ii}^\alpha)e_\alpha$,平均曲率 $H = \dfrac{1}{n}\sqrt{\sum(\sum h_{ii}^\alpha)^2}$,用 $\|\sigma\|^2$ 记 M 的第二基本形式模长平方.

用 h_{ijk}^α 和 h_{ijkl}^α 分别记第二基本形式 h_{ij}^α 的一阶和二阶协变微分,则

$$\sum h_{ijk}^\alpha\omega_k = dh_{ij}^\alpha - \sum h_{ki}^\alpha\omega_{kj} - \sum h_{jk}^\alpha\omega_{ki} - \sum h_{ij}^\beta\omega_{\beta\alpha}, \tag{2.11}$$

$$\sum h_{ijkl}^\alpha\omega_l = dh_{ijk}^\alpha - \sum h_{ljk}^\alpha\omega_{li} - \sum h_{ilk}^\alpha\omega_{lj} - \sum h_{ijl}^\alpha\omega_{lk} - \sum h_{ijk}^\beta\omega_{\beta\alpha}, \tag{2.12}$$

Codazzi 方程与 Ricci 方程为

$$h^{\alpha}_{ijk}=h^{\alpha}_{ikj},$$

$$h^{\alpha}_{ijkl}-h^{\alpha}_{ijlk}=-\sum h^{\alpha}_{im}R_{mjkl}-\sum h^{\alpha}_{jm}R_{mikl}-\sum h^{\beta}_{ij}R_{\alpha\beta kl},\tag{2.13}$$

第二基本形式的 Laplacian 为 $\Delta h^{\alpha}_{ij}=\sum h^{\alpha}_{ijkk}$.

3　定理的证明

引理 1[6]　设 $a_1,\cdots,a_n,b$ 是 $n+1(n\geqslant 2)$ 个实数,满足 $(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^2\geqslant(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2+b$, 则对任意 $i,j(i\neq j)$ 有 $2a_ia_j\geqslant\dfrac{b}{n-1}$.

我们可建立下面的引理

引理 2　设 M 是 de Sitter 空间 $S^{n+p}_p(c)$ 中的 n 维完备类空子流形,若 M 的数量曲率在 M 上 P 点满足

$$R\leqslant(2-n)\|\sigma\|^2+(n-2)(n-1)c-2(n-1)a,\tag{3.1}$$

则在 P 点,M 的截面曲率 $K(M)\leqslant -a$,a 是任意实数.

证　由(2.7)式得

$$R_{ijij}=\sum[h^{\alpha}_{ii}h^{\alpha}_{jj}-(h^{\alpha}_{ij})^2]-c\quad(i\neq j),\tag{3.2}$$

选取 e_{n+1} 平行于平均曲率向量,记 $h_{ij}=h^{n+1}_{ij}$,则

$$\|\sigma\|^2=\sum_{ij\alpha}(h^{\alpha}_{ij})^2=\sum_i h^2_{ii}+\sum_{i\neq j}h^2_{ij}+\sum_{ij,\alpha\geqslant n+2}(h^{\alpha}_{ij})^2,\tag{3.3}$$

$$n^2H^2=(\sum_i h_{ii})^2.\tag{3.4}$$

把(2.9)式代入引理 2 中(3.1)式得

$$n(n-1)c-n^2H^2+\|\sigma\|^2\leqslant(2-n)\|\sigma\|^2+(n-2)(n-1)c-2(n-1)a,$$

$$n^2H^2\geqslant(n-1)\|\sigma\|^2+2(n-1)c+2(n-1)a,\tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{n}h_{ii})^2\geqslant&(n-1)\sum_i h^2_{ii}+(n-1)\sum_{i\neq j}h^2_{ij}\\&+(n-1)\sum_{ij,\alpha\geqslant n+2}(h^{\alpha}_{ij})^2+2(n-1)c+2(n-1)a,\end{aligned}\tag{3.6}$$

把引理 1 应用到(3.6)式得

$$\begin{aligned}2h_{ii}h_{jj}\geqslant&\sum_{i\neq j}h^2_{ij}+\sum_{ij,\alpha\geqslant n+2}(h^{\alpha}_{ij})^2+2c+2a\\\geqslant&2(h_{ij})^2+\sum_{\alpha\geqslant n+2}[(h^{\alpha}_{ii})^2+(h^{\alpha}_{jj})^2+2(h^{\alpha}_{ij})^2]+2c+2a,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2h_{ii}h_{jj}-2(h_{ij})^2\geqslant&\sum_{\alpha\geqslant n+2}[(h^{\alpha}_{ii})^2+(h^{\alpha}_{jj})^2+2(h^{\alpha}_{ij})^2]+2c+2a\\\geqslant&2\sum_{\alpha\geqslant n+2}[|h^{\alpha}_{ii}h^{\alpha}_{jj}|+(h^{\alpha}_{ij})^2]+2c+2a.\end{aligned}\tag{3.7}$$

(3.7)式两边同时加上 $2\sum\limits_{\alpha\geqslant n+2}[h^{\alpha}_{ii}h^{\alpha}_{jj}-(h^{\alpha}_{ij})^2]$ 得

$$2\sum_{\alpha\geqslant n+1}[h^{\alpha}_{ii}h^{\alpha}_{jj}-(h^{\alpha}_{ij})^2]\geqslant2\sum_{\alpha\geqslant n+2}[|h^{\alpha}_{ii}h^{\alpha}_{jj}|+h^{\alpha}_{ii}h^{\alpha}_{jj}]+2c+2a\geqslant2(c+a),\tag{3.8}$$

由(3.2)式和(3.8)式得

$$R_{ijij} = \sum[h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha} - (h_{ij}^{\alpha})^2] - c \geqslant c + a - c = a.$$

截面曲率 $K(e_i, e_j) = -R_{ijij} = R_{ijji} \leqslant -a.$ ▌

注 显然易见,引理 2 当 $a=0$,不等式变为严格不等式时结论亦成立,即有当

$$R < (2-n)\|\sigma\|^2 + (n-2)(n-1)c \tag{3.9}$$

时,$K(M)<0$.

定理 1 的证明 设 $f = \|\sigma\|^2 = \sum_{ij\alpha}(h_{ij}^{\alpha})^2$,

$$\frac{1}{2}\Delta f = \sum_{ijk\alpha} h_{ij}^{\alpha}h_{ijkk}^{\alpha} + \sum_{ijk\alpha}(h_{ijk}^{\alpha})^2, \tag{3.10}$$

选取 e_{n+1} 平行于平均曲率向量 h,那么

$$\mathrm{tr}H_{\alpha} = 0 \quad \alpha \neq n+1, \qquad \mathrm{tr}H_{n+1} = nH.$$

如果 $H=0$,由(2.11)式,(2.12)式易得

$$\sum_k h_{kkij}^{\alpha} = 0, \tag{3.11}$$

如果 $H \neq 0$,易知 e_{n+1} 是平行的法向量场,即 $\omega_{n+1,\alpha}=0$. 那么由(2.11)式可得 $\sum_i h_{iik}^{\alpha} = 0$,因而根据(2.12)式仍有(3.11)式成立. 因而(3.10)式可写为

$$\frac{1}{2}\Delta f = \sum_{ijk\alpha} h_{ij}^{\alpha}(h_{ijkk}^{\alpha} - h_{kkij}^{\alpha}) + \sum_{ijk\alpha}(h_{ijk}^{\alpha})^2. \tag{3.12}$$

不难看到

$$h_{ijkk}^{\alpha} - h_{kkij}^{\alpha} = h_{kijk}^{\alpha} - h_{kikj}^{\alpha} = -\sum_m h_{km}^{\alpha}R_{imjk} - \sum_m h_{mi}^{\alpha}R_{kmjk} - \sum_{\beta} h_{ki}^{\beta}R_{\beta\alpha jk},$$

于是(3.12)式可写为

$$\frac{1}{2}\Delta f = -\sum_{ijkm\alpha} h_{ij}^{\alpha}(h_{km}^{\alpha}R_{imjk} + h_{mi}^{\alpha}R_{kmjk}) + \sum_{ijk\alpha}(h_{ijk}^{\alpha})^2 - \sum_{ijk\alpha\beta} h_{ij}^{\alpha}h_{ki}^{\beta}R_{\beta\alpha jk}. \tag{3.13}$$

由于法联络是平坦的,所以第二基本张量 H_{α} 可同时对角化,即存在 n 个相互正交的单位向量 $e_1, \cdots, e_n$,使得 $h_{ij}^{\alpha}=0(i \neq j)$,于是 $R_{\beta\alpha jk}=0$,且(3.13)式变为

$$\frac{1}{2}\Delta f = -\sum_{\alpha}\sum_{i<k}(h_{kk}^{\alpha} - h_{ii}^{\alpha})^2 R_{kiik} + \sum_{ijk\alpha}(h_{ijk}^{\alpha})^2, \tag{3.14}$$

由已知 $R_{kiik}<0$,所以(3.14)式右边各项是非负的,因为 M 的数量曲率是常数,故 $f=\|\sigma\|^2$ 亦是常数,因此再由(3.14)式,对 $\alpha=n+1, \cdots, n+p$ 和任意一对 i, j 有 $h_{ii}^{\alpha}=h_{jj}^{\alpha}$,即 M 是全脐点的. 定理 1 证毕. ▌

定理 2 的证明 因为引理 2 当 $a=0$,不等式变为严格不等式时结论亦成立,即当(3.9)式成立时,$K(M)<0$,而当定理 2 的条件 $\|\sigma\|^2 < \frac{n^2H^2}{n-1} - 2c$ 成立时,由(2.9)式有

$$R < (2-n)\|\sigma\|^2 + (n-2)(n-1)c,$$

因此,M 的截面曲率 $K(M)<0$,由定理 1 的结论,M 是全脐点子流形. 定理 2 证毕. ▌

当 M 是紧致的类空子流形时,可以取掉对 M 是常数量曲率的限制,我们有下面的

推论 设 M 是 de Sitter 空间 $S_p^{n+p}(c)$ 的具平行平均曲率的 n 维紧致类空子流形,若 M 在 $S_p^{n+p}(c)$ 中的法联络是平坦的,且 $\|\sigma\|^2 < \frac{n^2H^2}{n-1} - 2c$,则 M 是全脐点子流形.

事实上,当 M 紧致时,由于(3.14)式右边非负,由 Hopf 引理知 f 是常数,即 M 是具有常数量曲率的类空子流形,故由定理 2 的结论知推论成立.

参 考 文 献

[1] Akutagawa K. On space-like hypersufaces with constant mean curvature in the de sitter space. Math Z, 1987, **196**(1): 13—19

[2] Cheng Q M. Complete space-like submanifolds in a de Sitter space with parallel mean curvature vector. Math Z, 1991, **206**(3): 333—339

[3] U-Hang KI, Kim H J, Nakagawa H. On space-likehypersurfaces with constant mean curvature of a Lorentz space form. Tokyo J of Math, 1991, **14**(2): 205—216

[4] 舒世昌. de Sitter空间中具平行平均曲率向量的完备类空子流形. 数学进展, 1998, **27**(3): 252—258

[5] Zheng Y F. On space-like hypersurface in the de Sitter space. Annals of Global Analysis and Geometry, 1995, **13**(3): 317—321

[6] Chen B Y, Okumure M. Scalar curvature, inequality and submanifold. Pro Amer Soc, 1973, **38**(6): 605—608

Complete Space-like Submanifolds with Flat Connection of Normal Bundle in the de Sitter Space

[1,2] Shu Shichang [1] Liu Sanyang

([1] *Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xi'an* 710071;

[2] *Department of Mathematics, Xianyang Teacher's College, Xianyang*, 712000)

Abstract: Let M be a complete n-demensional space-like submanifold in the de Sitter space $S_p^{n+p}(c)$ with parallel mean curvature vector and constant scalar curvature, if the connection of normal bundle is flat and $K(M)<0$, or $\|\sigma\|^2<\frac{n^2H^2}{n-1}-2c$, then M is a totally umbilical submanifold.

Key words: de Sitter space; Normal bundle; Space-like submanifold; Second fundament tensor.

MR(2000) Subject Classification: 53C40