2004,**24A**(4):475－479

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

二分图中含有完美对集的 2-因子 *

王骁力

(山东大学数学与系统科学学院　济南 250100;南阳师范学院数学系　南阳 473061)

摘要:该文证明若 G 是 2n 阶均衡二分图,$\delta(G)\geqslant(2n-1)/3$,则对任何正整数 k,$n\geqslant 4k$ 时,任给 G 的一个完美对集 M,G 中存在一个包含 M 的所有边的恰含 k 个分支的 2-因子($k=1$,$n=5$ 且 $\delta(G)=3$除外). 特别 $k=2$ 时,在条件 $n\geqslant 5$ 且 $\delta(G)\geqslant(n+2)/2$ 下,结论也成立. 这里所给的 $\delta(G)$的下界是最好的可能.

关键词:均衡二分图; 完美对集; 2-因子; M-2-因子.

MR(2000)主题分类:05C70　　**中图分类号**:O157.5　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2004)04-475-05

1　引言

本文仅考虑简单有限无向图. G 的一个 m-因子是指 G 的一个 m-正则生成子图. 特别,G 的 1-因子也称为完美对集,即覆盖 G 的所有顶点的独立边之集;G 的 2-因子即覆盖 G 的所有顶点的独立圈之集;仅含一个圈的 2-因子也称为 Hamilton-圈. 在 1952 年,Dirac[2]证明:若 G 是一个阶 $n\geqslant 3$ 的图,最小度 $\delta(G)\geqslant n/2$,则 G 为 Hamilton 图. 以此定理为基础引出了多种与度有关的问题的研究. 其中一个有趣的问题是:在什么条件下,G 的每个完美对集均包含在 G 的一个 2-因子中? Häggkvist[3]首先给出了下面的结果.

定理 1[3]　设 G 为 n 阶图,$n\geqslant 4$ 是偶数. 若 G 中任意两个不相邻顶点度数之和不小于 $n+1$,则 G 的每个完美对集均包含于一个 Hamliton 圈中.

设 $G=(X,Y;E)$是一个二分图,若$|X|=|Y|$,则称 G 是一个均衡二分图. 关于二分图,Las Vergnas[4]证明了下面的定理.

定理 2[4]　设 G 是 $2n$ 阶均衡二分图,若 G 中任意两个属于不同部分的不相邻顶点 u、v,均有 $d(u)+d(v)\geqslant n+2$, 则 G 的每个完美对集均包含于一个 Hamilton-圈中.

最近,Chen Guantao 等人又给出了更好的结果.

定理 3[5]　设 k 为正整数, G 为 $2n$ 阶均衡二分图,且 $n\geqslant 9k$. 若$\delta(G)\geqslant(n+2)/2$,则对 G 的每个完美对集 M,G 中存在一个恰含 k 个分支且包含 M 的每条边 2-因子.

本文将证明下面结果.

定理 4　设 G 是 $2n$ 阶均衡二分图,$n\geqslant 5$ 且 $\delta(G)\geqslant(n+2)/2$,则对 G 的每个完美对集 M,G 中存在一个恰含两个分支且包含 M 的每条边的 2-因子.

收稿日期:2001-07-03; 修订日期:2003-09-02

* 基金项目:国家自然科学基金(60172003)资助

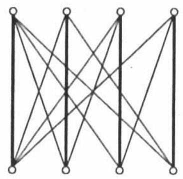

图 1 G_1

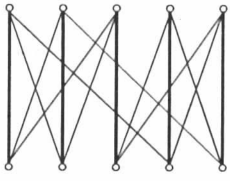

图 2 G_2

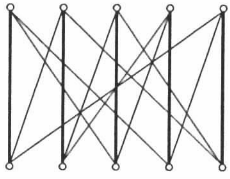

图 3 G_3

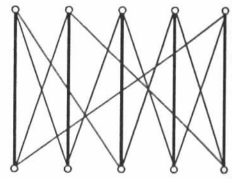

图 4 G_4

定理 5 设 G 是 $2n$ 阶均衡二分图，$n\geqslant 4k$，$\delta(G)\geqslant(2n-1)/3$，则对 G 的每个完美对集 M，G 中存在一个恰含 k 个分支且包含 M 的每条边的 2-因子（$k=1$，$n=5$ 且 $\delta(G)=3$ 除外）.

注 定理 4 中，要使 G 存在一个有两个分支的 2-因子，显然 $n\geqslant 4$. 但 $n=4$，$\delta(G)=(n+2)/2=3$ 时，图 1 中的 G_1 不存在包含由粗线边组成的完美对集的恰含两个圈的 2-因子. 所以 $n\geqslant 5$ 已是最好的可能. $n=5$，$\delta(G)=(n+1)/2=3$ 时，图 2 中的 G_2 和图 3 中 G_3 不存在包含由粗线边组成的完美对集的恰含两个圈的 2-因子. 所以 $\delta(G)\geqslant(n+2)/2$ 从某种程度上已是最好的可能.

定理 5 中，取 $k=1$，$n=5$，$\delta(G)=\lceil(2n-1)/3\rceil=3$，则结论不成立. 如图 4 中的 G_4 不存在包含由粗线边组成的完美对集的 Hamilton-圈. 定理 5 中的 $n\geqslant 2k$ 是显然的. 取 $k=2$，$n=4$，$\delta(G)=\lceil(2n-1)/3\rceil=3$，从图 1 的 G_1 可知此时定理 5 结论不成立，所以 $n>2k$. 下面我们讨论 $n\geqslant 4k$ 的情形.

在下面的讨论中，我们始终用 $G=(X,Y;E)$ 表示 $2n$ 阶均衡二分图，M 为 G 的一个完美对集. 若 G 中的路 $P[u,v]$ 上 M-边和非 M-边交错地出现，且 u,v 均关联于 M-边，则称 $P[u,v]$ 为 M-路；若圈 C 中的边交错地属于 M，则称圈 C 为 M-圈；若 G 的一个 2-因子的任何分支均为 M-圈，则称 C 为 M-2-因子. 设 A,B 为 G 的任意两个无交子图或 $V(G)$ 的两个无交子集，用 $|E(A,B)|$ 表示两个端点分别属于 A,B 的所有边的集合，且

$$e(A,B)=|E(A,B)|.$$

若 $A\subseteq X$，记 $\underline{A}=\{y\in Y:xy\in M,x\in A\}$，即在 M 中与 A 中元素匹配的 Y 中元素的全体；若 $A\subseteq Y$，同理可以定义在 M 中与 A 中元素匹配的 X 中元素的全体，仍用 $\underline{A}$ 表示. 若 $W\subseteq V(G)$，用 $\langle W\rangle$ 表示 G 的由 W 诱导的子图；对每个 $x\in V(G)$，令 $N_H(v)=N(v)\cap V(H)$，$d_H(v)=|N_H(v)|$. 其它未经说明的术语和符号参见[1].

2 定理的证明

引理 1[5] 设 G 是 $2n$ 阶均衡二分图，M 为 G 的任一完美对集，图 G 的最小度 $\delta(G)\geqslant(n+2)/2$，且 G 中存在 k 个顶点无交的 M-圈，则 G 中存在恰含 k 个圈的 M-2-因子.

引理 2 设 G 是 $2n$ 阶均衡二分图，$n\geqslant 4$ 且 $n\neq 5$，$\delta(G)\geqslant(2n-1)/3$，则 G 的每个完美对集 M 包含于 G 的一个 Hamilton 圈中.

证 $n=4$ 时，$\delta(G)\geqslant 3$，所以 $2\delta(G)\geqslant 6=n+2$. $n\geqslant 6$ 时，$2\delta(G)\geqslant 2(2n-1)/3=n+(n-2)/3\geqslant n+4/3$，也有 $2\delta(G)\geqslant n+2$. 由定理 2 可知引理 2 成立. ▌

定理 4 的证明 任取 $uv,u_1v_1\in M$，如果总有 $e(\{u,v\},\{u_1,v_1\})\leqslant 1$，则

$$d(u)+d(v)\leqslant(|M|-1|)+2=n+1<2\delta(G),$$

与假设矛盾. 所以必存在 $u_iv_i\in M\ (i=1,2)$, 使 $e(\{u_1,v_1\},\{u_2,v_2\})=2$, 即 G 中存在长为 4 的 M-圈 $C=u_1v_1u_2v_2u_1$. 记 $H=G\backslash V(C)$, 则 $H\neq\phi$. 若 H 中不存在 M-圈, 可设 $P=x_1y_1x_2y_2\cdots x_ty_t(x_iy_i\in M,\ i=1,2,\cdots,t)$ 为 H 中的最长的 M-路, 则 P 的两个端点 x_1,y_t 有性质

$$N(x_1)\cap\{y_2,y_3,\cdots,y_t\}=\phi,$$
$$N(y_t)\cap\{x_1,x_2,\cdots,x_{t-1}\}=\phi.$$

于是

$$\begin{aligned}&d_{H\backslash V(P)}(x_1)+d_{H\backslash V(P)}(y_t)\\&=(d(x_1)+d(y_t))-(d_C(x_1)+d_C(y_t))-(d_P(x_1)+d_P(y_t))\\&\geqslant n+2-4-2=n-4\geqslant 1,\end{aligned}$$

所以 x_1 或 y_t(不妨设 y_t)有 $d_{H\backslash V(P)}(y_t)\geqslant 1$. 于是 $H\backslash V(P)$ 中存在 y_t 的邻点 x_{t+1}. 所以存在 y_{t+1}, 使 $x_{t+1}y_{t+1}\in M$, 这样我们得到了比 P 更长的 M-路 $x_1y_1\cdots x_ty_tx_{t+1}y_{t+1}$, 与 P 的选取矛盾. 所以 H 中必存在 M-圈 C_1, 于是 G 中总存在两个顶点无交 M-圈 C 和 C_1. 再由引理 1 知定理 4 成立. ▌

引理 3　设 G 是 $2n$ 阶均衡二分图, $k\geqslant 3$, $n\geqslant 4k$, 且 $\delta(G)\geqslant(2n-1)/3$, 则对 G 的每个完美对集 M, G 中总存在 k 个长度不大于 6 的顶点无交的 M-圈.

证　假设引理 3 不成立. 设 G 有 $t\ (t<k)$ 个长度不大于 6 的顶点无交的 M-圈, 但不存在 $t+1$ 个长度不大于 6 的顶点无交的 M-圈. 设 $C_1, C_2,\cdots, C_t$ 是满足这种性质且使 $\sum\limits_{i=1}^{t}|V(C_i)|$ 最小的圈. 不妨设 $C_1, C_2,\cdots, C_s\ (s\leqslant t)$ 是长为 4 的圈, $C_{s+1},\cdots, C_t$ 是长为 6 的圈. 记 $G_1=\langle\bigcup\limits_{i=1}^{t}V(C_i)\rangle$, $H=G\backslash G_1$, 则由于 $|V(G_1)|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{t}|V(C_i)|=6t-2s<8k=|G|$, 所以 $H\neq\phi$. 我们证明下面三个断言成立.

断言 1　对任意 $uv\in M\cap H$, 若 C_{i_0} 为 6-圈, 则 $e(\{u,v\},C_{i_0})\leqslant 3$.

记 $C_{i_0}=x_1y_1x_2y_2x_3y_3x_1\ (x_jy_j\in M, j=1,2,3)$, 则对每个 j, $e(\{u,v\},\{x_j,y_j\})\leqslant 1$. 否则, 若有 $e(\{u,v\},\{x_{j_0},y_{j_0}\})\geqslant 2$, 则可以用长为 4 的 M-圈代替 C_{i_0}, 与 $\sum\limits_{i=1}^{t}|V(C_i)|$ 最小矛盾.

断言 2　存在 $uv\in M\cap H$, 使 $e(\{u,v\},C_i)\leqslant 3$, 对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,t\}$ 成立.

否则, 若对任意的 $uv\in M\cap H$, 均存在 i, 使 $e(\{u,v\},C_i)\geqslant 4$, 则由断言 1 知 C_i 必为 4-圈, 此时 $e(\{u,v\},C_i)=4$. 于是 G 的导出子图 $\langle V(C_i)\cup\{u,v\}\rangle$ 是边数不少于 9 的二分图, 所以, $\langle V(C_i)\cup\{u,v\}\rangle\cong K_{3,3}$. 这时

$$|M\cap H|=|V(H)|/2\geqslant(2n-6t)/2\geqslant(8k-6t)/2>k>t,$$

即 $|M\cap H|$ 中的边数多于圈 C_i 的个数. 有鸽巢原理知, 存在圈 C_{i_0} 及 $M\cap H$ 中的边 u_1v_1 和 u_2v_2 及

使
$$e(\{u_1,v_1\},C_{i_0})=e(\{u_2,v_2\},C_{i_0})=4.$$

由前面的讨论知

$$\langle V(C_{i_0})\cup\{u_1,v_1\}\rangle\cong K_{3,3},\quad\langle V(C_{i_0})\cup\{u_2,v_2\}\rangle\cong K_{3,3}.$$

于是 $\langle V(C_{i_0})\cup\{u_1,v_1,u_2,v_2\}\rangle$ 中包含两个长为 4 的顶点不交的 M-圈. 这样 G 中存在 $t+1$ 个顶点不交的 M-圈, 与 t 最大的假设矛盾. 所以断言 2 成立.

设 $u_0v_0\in M\cap H$, 使 $e(\{u_0,v_0\},C_i)\leqslant 3$, 对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,t\}$ 成立. 于是

$$d_{G_1}(u_0)+d_{G_1}(v_0)\leqslant 3t. \tag{1}$$

记
$$n_1 = \sum_{i=1}^{t} |V(C_i)|/2,$$
$$n_2 = |N_H(u_0)\backslash\{v_0\}|,$$
$$n_3 = |N_H(v_0)\backslash\{u_0\}|,$$
$$n_4 = |V(H)|/2 - |\underline{N_H(u_0)} \cup N_H(v_0)|.$$
由于 H 中不含长$\leqslant 6$ 的 M-圈，所以
$$\underline{N_H(u_0)} \cap N_H(v_0) = \{u_0\},$$
$$N_H(u_0) \cap \underline{N_H(v_0)} = \{v_0\},$$
这样
$$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 1.$$
不妨设 $n_2 \leqslant n_3$，则 $n_2 \leqslant (n-(n_1+n_4+1))/2$. 结合(1)式，可知
$$\begin{aligned} d_H(u_0) + d_H(v_0) &= n_2 + n_3 + 2 \\ &= (d(u_0) + d(v_0)) - (d_{G_1}(u_0) + d_{G_1}(v_0)) \\ &\geqslant 2\delta(G) - 3t, \end{aligned}$$
所以
$$n_1 + n_4 = n - (n_2 + n_3 + 1) \leqslant n - 2\delta(G) + 3t + 1.$$

断言 3 对每个 $x \in \underline{N_H(u_0)}\backslash\{u_0\}$，$|N(x) \cap N_H(u_0)| \geqslant (n_2+2)/2$.

若存在 $x \in \underline{N_H(u_0)}\backslash\{u_0\}$，使 $|N(x)\cap N_H(u_0)| \leqslant (n_2+1)/2$. 由于 H 不含长 6 的 M-圈，所以 $N(x) \cap \underline{N_H(v_0)} = \phi$. 于是
$$\begin{aligned} |N(x) \cap N_H(u_0)| &= |N(x) \cap (\underline{N_H(v_0)} \cup N_H(u_0))| \\ &= |N(x)| + |\underline{N_H(v_0)} \cup N_H(u_0)| - |N(x) \cup (\underline{N_H(v_0)} \cup N_H(u_0))| \\ &\geqslant d(x) + (n_2 + n_3 + 1) - n = d(x) - (n_1 + n_4) \\ &\geqslant \delta(G) - (n_1 + n_4). \end{aligned}$$
这样
$$(n_2 + 1)/2 \geqslant \delta(G) - (n_1 + n_4),$$
因此
$$((n - (n_1 + n_4 + 1))/2 + 1)/2 \geqslant \delta(G) - (n_1 + n_4),$$
即
$$4\delta(G) - n \leqslant 3(n_1 + n_4) + 1 \leqslant 3(n - 2\delta(G) + 3t + 1) + 1.$$
于是
$$10\delta(G) - 4n \leqslant 9t + 4,$$
即
$$10(2n-1)/3 - 4n \leqslant 9t + 4,$$
我们有
$$n \leqslant (27t + 22)/8 < 27(t+1)/8 < 4k \leqslant n,$$
矛盾. 所以断言 3 成立.

下面记 $Y_1 = N_H(u_0)\backslash\{v_0\}$，$X_1 = \underline{N_H(u_0)}\backslash\{u_0\} = \underline{Y_1}$，则 $|X_1| = |Y_1| = n_2$. 考虑子图 $G_2 = \langle X_1 \cup Y_1 \rangle$. 由断言 3 知
$$\sum_{y \in Y_1} d_{G_2}(y) = \sum_{x \in X_1} d_{G_2}(x) \geqslant n_2(n_2+2)/2.$$
由鸽巢原理知，存在 $y_0 \in Y_1$，使 $d_{G_2}(y_0) \geqslant (n_2+2)/2$. 设 $x_0 y_0 \in M \cap G_2$，则
$$|N_{G_1}(y_0) \cap \underline{N_{G_2}(x_0)}| = |N_{G_2}(y_0)| + |\underline{N_{G_2}(x_0)}| - |N_{G_1}(y_0) \cup \underline{N_{G_2}(x_0)}|$$

$$\geqslant d_{G_2}(x_0) + d_{G_2}(y_0) - |X_1| \geqslant n_2 + 2 - n_2 = 2,$$

所以 G_2 中存在一个长为 4 的 M-圈，又与 $C_1, C_2, \cdots, C_t$ 的选取矛盾．故引理 3 成立． ▍

定理 5 的证明 当 $k=2$ 时，易见当 $n \geqslant 4k$ 时，$\delta(G) \geqslant [(2n-1)/3] \geqslant [(n+2)/2]$．由定理 4 知此时定理 5 成立．

当 $k \geqslant 3$ 时，由引理 1 和引理 3 知 G 中存在恰含 k 个圈的 M-2-因子．

再结合引理 2 知定理 5 成立． ▍

致谢 感谢刘桂真教授的悉心指导．

参 考 文 献

[1] Bondy J A，Murty U S R. Graph Theory with Application. London：the Macmillam Press Ltd，1976

[2] Dirac G. Some theorems on abstract graphs. Proc London Math Soc，1952，**2**：69－81

[3] Häggkvist R. On F-Hamiton graphs，Graph Theory and Related Topics. New York：Academic Press，1979. 219－231

[4] Las Vergnes M.［Ph. D. Thesis］，University of Paris，1972

[5] Chen G，Gonld R，Jacobson M. On 2-facters containg 1-facters in bipartite graphs. Discr Math，1999，**198**：185－194

[6] Feng Haodi. On orthogonal $(0, f)$-factorizations. Acta Math Sci，1999，**19**(30)：332－336

On 2-factors Containing Perfect Matching in Bipartite Graphs

Wang Xiaoli

(*School of Mathematics and System Science*, *Shandong University*, *Jǐnan* 250100;
Department of Mathematics, *Nanyang Normal University*, *Nanyang* 473061)

Abstract: A bipartite graph $G = (X, Y; E)$ is called balanced if $|X| = |Y|$. Let $G = (X, Y; E)$ be a balanced bipartite graph of order $2n$, suppose that the minimum degree of G is at least $(2n-1)/3$, the author shows that if $n \geqslant 4k$, then for each perfect matching M, G contains a 2-factor with exactly k components (vertex disjoint cycles) including every edge of M (with one exception that $k = 1$, $n = 5$ and $\delta(G) = 3$). When $k = 2$, $n \geqslant 5$, the author has the same conclusion under the condition $4\delta \geqslant (n + 1)/2$, and this bound about minimum degree is the best possible.

Key words: Balanced bipartite graph; Perfect matching; 2-factor; M-2-factor.

MR(2000) Subject Classification: 05C70