2004,**24A**(6):683－688

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

服务员假期中以概率 p 进入的 $M/G/1$ 排队系统的随机分解*

[1] 唐应辉　[2] 毛勇

([1] 电子科技大学应用数学学院　成都 610054；[2] 电子科技大学物理电子学院　成都 610054)

摘要:该文研究 $M/G/1$ 多重休假排队系统,其中在服务员休假中到达顾客以概率 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$ 进入. 通过引进"服务员忙期"和使用拉普拉斯变换或拉普拉斯——司梯阶变换,我们获得队长瞬态分布的拉普拉斯变换和稳态分布的递推表达式,进一步得到稳态队长分布的随机分解和在特殊情况下相应的一些结果.

关键词:服务员假期;p-进入规则;队长;瞬态分布;稳态分布;随机分解.

MR(2000)主题分类:60K25　　**中图分类号**:O121　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2004)06-683-06

1　引言

近年来,许多文献研究了各种各样的休假排队系统(见后面参考文献). 这些文献研究的主要是稳态下队长和等待时间的随机分解,使用的分析技术主要有嵌入的马尔柯夫链方法、直接概率分解法、水平交叉法和样本轨道法等. 文献[7]研究了多重休假和单重休假的 $M/G/1$ 排队的离去过程,本文将继续研究多重休假的 $M/G/1$ 排队,其中在服务员休假中到达顾客以概率 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$ 进入系统. 从队长过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 本身出发,我们既讨论了队长的瞬态分布,也讨论了队长的稳态分布. 本文考虑的排队系统的描述如下

1) 顾客相继到达的间隔时间序列 $\tau_i,i=1,2,\cdots$,独立同分布 $F(t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t},t\geqslant 0$;

2) 顾客的服务时间序列 $\chi_i,i=1,2,\cdots$,独立同一般分布 $G(t),t\geqslant 0$,且平均服务时间为 $1/\mu(0<\mu<\infty)$;

3) 服务员采取多重休假规则,即当系统变空时,服务员去休假一次,如果从休假转来发现系统中有顾客等待,则立即为顾客服务,直到系统再次变空又去进行一次休假;如果从休假转来发现系统中没有顾客等待,则服务员立即又去进行一次休假,以此类推. 假定各次休假 $V_i,i=1,2,\cdots$,独立同一般分布 $V(t),t\geqslant 0$;

4) 在假期中到达的顾客以概率 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$进入系统,且到达、服务和休假是相互独立的;

5) 在 $t=0$ 时刻,当队长 $N(0)=0$ 时,服务员不进行休假,即服务员休假仅在繁忙一段时间后进行. 但是,稳态结果与系统的初始状态无关.

收稿日期:2002-04-01;修订日期:2003-05-12

E-mail:tangyh@uestc.edu.cn

* 基金项目:国家教育部高校骨干教师资助计划基金([2000]65)和四川省学术与技术带头人培养基金([2001]16)资助

注 本文采用如下一些记号

$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$ 表示系统的交通强度；$N(t)$表示时刻 t 系统的队长，即系统中的顾客数；$G^{(k)}(t)$表示相应分布 $G(t)$的 k 重卷积，$k\geqslant 1$，且 $G^{(0)}(t)=1, t\geqslant 0$；$g(s)$表示相应 $G(t)$的拉普拉斯—司梯阶变换，即 $g(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}G(t)$；$E[V]$表示每次休假的平均长度.

2 队长的瞬态分布

首先，我们定义"系统闲期"和"服务员忙期"如下

"系统闲期"是指从系统刚变空的时刻起，直到第一个顾客进入系统为止的这段时间. 用 I_k 表示系统的第 k 个系统闲期长度，则根据模型的假设易得

当 $N(0)=0$ 时

$$F_k(t)=P\{I_k\leqslant t\}=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda t}, & k=1;\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda p t}, & k>1,\end{cases} \tag{1}$$

当 $N(0)=i(\geqslant 1)$时

$$F_k(t)=P\{I_k\leqslant t\}=1-\mathrm{e}^{-\lambda p t}, k=1,2,\cdots . \tag{2}$$

"服务员忙期"是指从服务员开始为顾客服务的时刻起，直到系统再次变空为止的这段时间. 如果令 b 表示从一个顾客开始服务的服务员忙期长度，$B(t)=P\{b\leqslant t\}, t\geqslant 0, b(s)=\int_o^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}B(t)$，类似文[12] 可得

引理 1 对 $\mathscr{R}(s)>0$，$b(s)$是方程 $z=g[s+\lambda(1-z)]$在$|z|<1$ 内的唯一根，且

$$B(t)=\sum_{k=1}^\infty\int_0^t \frac{(\lambda x)^{k-1}}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}G^{(k)}(x), t\geqslant 0, \tag{3}$$

$$\lim_{t\to\infty}B(t)=\lim_{s\to 0^+}b(s)=\begin{cases}1, & \rho\leqslant 1;\\ \omega<1, & \rho>1,\end{cases} \tag{4}$$

$$E[b]=\begin{cases}1/(\mu-\lambda), & \rho<1;\\ \infty, & \rho\geqslant 1,\end{cases} \tag{5}$$

其中 $\omega(0<\omega<1)$为 $\omega=g(\lambda-\lambda\omega)$的根，$\mathscr{R}(s)$为复变数 s 的实部.

为了讨论队长的瞬态分布，我们先讨论在服务员忙期中的瞬态分布. 令

$$Q_j(t)=P\{b>t\geqslant 0; N(t)=j\}, j\geqslant 1$$

表示在服务员忙期 b 中队长为 j 的瞬态分布，其中在 $t=0$ 时刻忙期 b 开始.

定理 1 令 $q_j^*(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}Q_j(t)\mathrm{d}t$, 则对 $\mathscr{R}(s)>0$，$q_j^*(s)$有如下递推式

$$q_1^*(s)=\frac{b(s)[1-g(s+\lambda)]}{(s+\lambda)g(s+\lambda)}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}q_j^*(s)=&\frac{b(s)}{g(s+\lambda)}\int_0^\infty[1-G(t)]\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{-(s+\lambda)t}\mathrm{d}t\\&+\frac{1}{g(s+\lambda)}\sum_{k=1}^{j-1}\frac{q_{j-k}^*(s)}{b^k(s)}\left\{b(s)-\sum_{i=0}^k\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+\lambda)t}\frac{[\lambda b(s)t]^i}{i!}\mathrm{d}G(t)\right\}, j>1.\end{aligned} \tag{7}$$

证 完全仿照文献[9]中定理 1 的证明可得. ▌

下面讨论队长的瞬态分布,令

$$p_{ij}(t)=P\{N(t)=j\mid_{N(0)=i}\},\ p_{ij}^{*}(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}p_{ij}(t)\mathrm{d}t,\ i\geqslant 0,j\geqslant 0.$$

定理 2 对 $\mathscr{R}(s)>0$,有

$$p_{00}^{*}(s)=\frac{1}{(s+\lambda)}\left\{1+\frac{\lambda b(s)[1-v(s+\lambda p)]}{(s+\lambda p)[1-v(s+\lambda p-\lambda p b(s))]}\right\},\tag{8}$$

$$p_{i0}^{*}(s)=\frac{b^{i}(s)[1-v(s+\lambda p)]}{(s+\lambda p)[1-v(s+\lambda p-\lambda p b(s))]},\ i\geqslant 1.\tag{9}$$

证 因为在时刻 t,队长等于零的充要条件是时刻 t 落在系统闲期中,所以利用全概率分解技术,并注意到在假期中顾客是以概率 p 进入系统,可得

$$\begin{aligned}p_{00}(t)=&P\{0\leqslant t<I_1;N(t)=0\}+P\{I_1+b_1\leqslant t<I_1+b_1+I_2;N(t)=0\}\\&+\sum_{k=1}^{\infty}P\{S_{k-1}\leqslant I_2<S_k;I_1+b_1+S_k\leqslant t;N(t)=0\}\\=&\mathrm{e}^{-\lambda t}+\int_0^t\mathrm{e}^{-\lambda p(t-x)}\mathrm{d}[F_1(x)*B(x)]\\&+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-x}\int_0^{t-x-y}p_{j0}(t-x-y-u)\frac{(\lambda p u)^j}{j!}\\&\cdot\mathrm{e}^{-\lambda p(y+u)}\mathrm{d}V(u)\mathrm{d}V^{(k-1)}(y)\mathrm{d}[F_1(x)*B(x)],\end{aligned}\tag{10}$$

其中 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}V_i$, $k\geqslant 1,S_0=0$;“$*$”表示分布函数的卷积.

对 $N(0)=i\geqslant 1$,类似可得

$$\begin{aligned}p_{i0}(t)=&\int_0^t\mathrm{e}^{-\lambda p(t-x)}\mathrm{d}B^{(i)}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-x}\int_0^{t-x-y}p_{jo}(t-x-y-u)\frac{(\lambda p u)^j}{j!}\\&\cdot\mathrm{e}^{-\lambda p(y+u)}\mathrm{d}V(u)\mathrm{d}V^{k-1}(y)\mathrm{d}B^{(i)}(x).\end{aligned}\tag{11}$$

(10)式和(11)式的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned}p_{00}^{*}(s)=&\frac{1}{s+\lambda}+\frac{\lambda b(s)}{(s+\lambda)(s+\lambda p)}\\&+\frac{\lambda b(s)}{(s+\lambda)[1-v(s+\lambda p)]}\sum_{j=1}^{\infty}p_{j0}^{*}(s)\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(s+\lambda p)t}\frac{(\lambda p t)^j}{j!}\mathrm{d}V(t),\end{aligned}\tag{12}$$

$$p_{i0}^{*}(s)=\frac{b^{i}(s)}{(s+\lambda p)}+\frac{b^{i}(s)}{1-v(s+\lambda p)}\sum_{j=1}^{\infty}p_{j0}^{*}(s)\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(s+\lambda p)t}\frac{(\lambda p t)^j}{j!}\mathrm{d}V(t).\tag{13}$$

由(12)式与(13)式可得关系式

$$p_{i0}^{*}(s)=\frac{(s+\lambda)b^{i-1}(s)}{\lambda}\left\{p_{00}^{*}(s)-\frac{1}{s+\lambda}\right\},\ i\geqslant 1,\tag{14}$$

然后(14)式代入(12)式,可解得 $p_{00}^{*}(s)$的表达式,从而可得 $p_{io}^{*}(s)$的表达式,证毕. ▍

定理 3 对 i、$j\geqslant 1$ 和 $\mathscr{R}(s)>0$,有

$$p_{oj}^{*}(s)=\frac{\lambda}{(s+\lambda)[1-v(\Lambda)]}\{[1-v(s+\lambda p)]q_j^{*}(s)+\delta_j^{*}(s)\},\tag{15}$$

$$p_{ij}^{*}(s)=\sum_{k=1}^{i}q_{j-(i-k)}^{*}(s)b^{k-1}(s)+\frac{b^{i-1}(s)}{1-v(\Lambda)}\{[v(\Lambda)-v(s+\lambda p)]q_j^{*}(s)+\delta_j^{*}(s)\}.\tag{16}$$

其中 $\Lambda=s+\lambda p-\lambda p b(s)$;$q_j^{*}(s)$由定理 1 给出,且

$$\delta_j^{*}(s)=b(s)\int_0^{\infty}[1-V(t)]\frac{(\lambda p t)^j}{j!}\mathrm{e}^{-(s+\lambda p)t}\mathrm{d}t$$

$$+\sum_{k=1}^{j-1}\frac{q_{j-k}^{*}(s)}{b^{k}(s)}\left\{v(\Lambda)-\sum_{l=0}^{k}\int_{0}^{\infty}\frac{[\lambda pb(s)t]^{l}}{l\,!}\mathrm{e}^{-(s+\lambda p)t}\mathrm{d}V(t)\right\},\quad j\geqslant 1.$$

证

$$\begin{aligned}p_{0j}(t)=&P\{I_1\leqslant t<I_1+b_1;N(t)=j\}\\&+\sum_{k=1}^{\infty}P\{S_{k-1}\leqslant I_2<S_k;I_1+b_1+I_2\leqslant t<I_1+b_1+S_k;N(t)=j\}\\&+\sum_{k=1}^{\infty}P\{S_{k-1}\leqslant I_2<S_k;I_1+b_1+S_k\leqslant t;N(t)=j\}\\=&\int_0^t Q_j(t-x)\mathrm{d}F_1(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-x}\bar V(t-x-y)\frac{[\lambda p(t-x-y)]^j}{j\,!}\\&\cdot\mathrm{e}^{-\lambda p(t-x)}\mathrm{d}V^{(k-1)}(y)\mathrm{d}[F_1(x)*B(x)]\\&+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-x}\int_0^{t-x-y}p_{mj}(t-x-y-u)\frac{(\lambda pu)^m}{m\,!}\\&\cdot\mathrm{e}^{-\lambda p(y+u)}\mathrm{d}V(u)\mathrm{d}V^{(k-1)}(y)\mathrm{d}[F_1(x)*B(x)],\end{aligned}\tag{17}$$

其中 $\bar V(t)=1-V(t),t\geqslant 0$.

类似地,当 $N(0)=i\geqslant 1$ 时,有

$$\begin{aligned}p_{ij}(t)=&\sum_{k=1}^{i}Q_{j-i+k}(t)*B^{(k-1)}(t)\\&+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-x}\bar V(t-x-y)\frac{[\lambda p(t-x-y)]^j}{j\,!}\mathrm{e}^{-\lambda p(t-x)}\mathrm{d}V^{(k-1)}(y)\mathrm{d}B^{(i)}(x)\\&+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t-x}\int_0^{t-x-y}p_{mj}(t-x-y-u)\frac{(\lambda pu)^m}{m\,!}\\&\cdot\mathrm{e}^{-\lambda p(y+u)}\mathrm{d}V(u)\mathrm{d}V^{k-1}(y)\mathrm{d}B^{(i)}(x).\end{aligned}\tag{18}$$

(17)式和(18)式的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned}p_{0j}^{*}(s)=&\frac{\lambda}{s+\lambda}q_j^{*}(s)+\frac{\lambda b(s)}{(s+\lambda)[1-v(s+\lambda p)]}\int_0^\infty[1-V(t)]\frac{(\lambda pt)^j}{j\,!}\mathrm{e}^{-(s+\lambda p)t}\mathrm{d}t\\&+\frac{\lambda b(s)}{(s+\lambda)[1-v(s+\lambda p)]}\sum_{m=1}^{\infty}p_{mj}^{*}(s)\int_0^\infty\frac{(\lambda pt)^m}{m\,!}\mathrm{e}^{-(s+\lambda p)t}\mathrm{d}V(t),\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}p_{ij}^{*}(s)=&\sum_{k=1}^{i}q_{j-i+k}^{*}(s)b^{k-1}(s)+\frac{b^i(s)}{1-v(s+\lambda p)}\int_0^\infty[1-V(t)]\frac{(\lambda pt)^j}{j\,!}\mathrm{e}^{-(s+\lambda p)t}\mathrm{d}t\\&+\frac{b^i(s)}{1-v(s+\lambda p)}\sum_{m=1}^{\infty}p_{mj}^{*}(s)\int_0^\infty\frac{(\lambda pt)^m}{m\,!}\mathrm{e}^{-(s+\lambda p)t}\mathrm{d}V(t).\end{aligned}\tag{20}$$

由(19)式和(20)式可得关系式

$$p_{ij}^{*}(s)=\sum_{k=1}^{i}q_{j-i+k}^{*}(s)b^{k-1}(s)+\frac{(s+\lambda)b^{i-1}(s)}{\lambda}\left\{p_{0j}^{*}(s)-\frac{\lambda}{s+\lambda}q_j^{*}(s)\right\},\tag{21}$$

然后将(21)式代入(19)式可解得 $p_{0j}^{*}(s)$表达式,从而可得 $p_{ij}^{*}(s)$的表达式. 证毕. ▌

3 队长的稳态分布和随机分解

定理 4 令 $p_j=\lim\limits_{t\to\infty}p_{ij}(t)$,则对 $0<p\leqslant 1$ 及任意初始状态,有

1) 当 $\rho\geqslant 1$ 时, $p_j=0, j=0,1,2,\cdots$ (22)

2) 当 $\rho<1$ 时

$$p_0=\frac{(1-\rho)[1-v(\lambda p)]}{\lambda pE[V][1-(1-p)\rho]}, \tag{23}$$

$$p_j=\frac{1-\rho}{[1-(1-p)\rho]E[V]}\left\{[1-v(\lambda p)]\theta_j+\int_0^{\infty}[1-V(t)]\frac{(\lambda pt)^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda pt}\mathrm{d}t\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{j-1}\theta_{j-k}\left[1-\sum_{l=0}^{k}\int_0^{\infty}\frac{(\lambda pt)^l}{l!}\mathrm{e}^{-\lambda pt}\mathrm{d}V(t)\right]\right\},\ j\geqslant 1, \tag{24}$$

其中

$$\theta_j=\frac{1}{g(\lambda)}\left\{\int_0^{\infty}[1-G(t)]\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{j-1}\theta_{j-k}\left[1-\sum_{i=0}^{k}\int_0^{\infty}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}G(t)\right]\right\}, j\geqslant 1;$$

$$v(\lambda p)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda pt}\mathrm{d}V(t);\ g(\lambda)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}G(t);\text{当 } j\leqslant 0 \text{ 时}, \sum_{k=1}^{j}=0.$$

证 由 $\lim\limits_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\lim\limits_{s\to 0^+}sp_{ij}^*(s)$,使用罗必达法则,结合引理 1 即得证. ▌

定理 5 令 $\Pi_v(z)$ 表示 $\{p_j, j\geqslant 0\}$ 的概率母函数,则对 $\rho<1$ 和 $0<p\leqslant 1$,有

$$\Pi_v(z)=\frac{(1-\rho)}{[1-(1-p)\rho]}\frac{g(\lambda(1-z))(1-pz)-(1-p)z}{g(\lambda(1-z))-z}\frac{1-v(\lambda p(1-z))}{\lambda p(1-z)E[V]}.$$
$$|z|<1 \tag{25}$$

证 由 $\Pi_v(z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}z^jp_j$,结合定理 4,直接计算即可. ▌

定理 6 令 L_v 表示平均队长,则对 $\rho<1$,有

$$L_v=\frac{p}{[1-(1-p)\rho]}\left\{\rho+\frac{\lambda^2E[\chi^2]}{2(1-\rho)}\right\}+\frac{\lambda pE[V^2]}{2E[V]}. \tag{26}$$

证 由 $L_v=\frac{d}{dz}[\Pi_v(z)]_{|z=1}$ 可得. ▌

4 一些特殊情形

推论 1 若 $p=1$,即在服务员假期中到达顾客以概率 1 进入系统,则对 $\rho<1$,有

$$\Pi_v(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)g(\lambda(1-z))}{g(\lambda(1-z)-z)}\cdot\frac{1-v(\lambda(1-z))}{\lambda(1-z)E[V]},\ |z|<1, \tag{27}$$

这与文献[1]和文献[9]的结果完全一致.

推论 2 若 $P\{V=0\}=1$,即该系统是没有假期的 $M/G/1$ 排队系统,且顾客到达率在忙期中是 λ,而在闲期中是 λp,则对 $\rho<1$,有

$$p_0=\frac{1-\rho}{[1-(1-p)\rho]};\ p_j=\frac{\lambda p(1-\rho)}{[1-(1-p)\rho]}\theta_j,\ j\geqslant 1, \tag{28}$$

概率母函数为

$$\Pi_v(z)=\frac{(1-\rho)}{[1-(1-p)\rho]}\frac{g(\lambda(1-z))(1-pz)-(1-p)z}{g(\lambda(1-z))-z},\ |z|<1. \tag{29}$$

参 考 文 献

[1] Levy Y, Yechiali Y. Utilizatiion of aidle time in an $M/G/1$ queueing system. Mgmt Sci, 1975, **22**(1): 202－211

[2] Fuhrmann S W. A note on the $M/G/1$ queue with server vacations. Opns Res, 1984, **31**(6): 1368－1373

[3] Harris C M, Marchal W G. State dependence in $M/G/1$ Server vacation models. Opns Res, 1988, **36**(4): 560－565

[4] Shanthikumar J G. On stochastic decomposition in $M/G/1$ type queues with generalized server vacations. Opns Res, 1988, **36**(4): 566－569

[5] Igaki N. Exponential two server queue with N-policy and general vacations. Queueing Systems, 1992, **10**(5): 279－294

[6] Tian N S, Li Q L, Cao J H. Conditional stochastic decompositions in the $M/M/c$ queue with server vacations. Stoch Mod, 1999, **15**(2): 367－377

[7] Tang Y H. The departure process of $M/G/1$ queueing model with server vacation and exhaustive server discipline. J App Prob, 1994, **31**(4): 1070－1082

[8] Tand Y H, Tand X W. The Queue length distribution for $M^x/G/1$, queue with single server vacation. Acta Math Scientia, 2000, **20**B(3): 397－408

[9] Tang Y H. The transient solution for $M/G/1$ queue with server vacations. Acta Math Scientia, 1997, **17**(3): 276－282

[10] Cohen J W. The Single Server Queue. Amsterdam: North-Holland, Publishing Company, 1982

[11] Widder D V. The Laplace Transform. Princeton: Princeton University Press, 1946

[12] 徐光辉. 随机服务系统. 北京:科学出版社,1988

The Stochastic Decomposition for $M/G/1$ Queue with p-Entering Discipline During Server Vacations

[1]Tang Yinghui [2]Mao Yong

([1]*College of Applied Mathematics, University of Electronic Science & Technology of China, Chengdu* 610054)

([2]*College of Physical Electronics, University of Electronic Science & Technology of China, Chengdu* 610054)

Abstract: This paper considers the $M/G/1$ queueing system with server vacations in which the customers who arrive during server vacations enter the system with probability $p(0\leqslant p\leqslant 1)$. By introducing the server busy period and using the Laplace or Laplace-Stieltjes transform, both the recursion expression of the Laplace transform of the transient distribution and the recursion expression of the equilibrium distribution for the queue length are obtained. Furthermore, the stochastic decomposition of the queue length at a random point in equilibrium and some corresponding results under special cases are also given.

Key words: Server vacation; p-entering discipline; Queue length; Transient distribution; Equilibrium distribution; Stochastic decomposition.

MR(2000) Subject Classification: 60K25