2004,**24A**(5):597－606

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

固定设计下回归函数的小波估计*

孙燕　柴根象

(同济大学应用数学系　上海 200092)

摘要:对于非参数回归模型:$Y_i=g(t_i)+\varepsilon_i,i=1,\cdots,n$,其中$\{t_i\}$为固定设计点列,$\{\varepsilon_i\}$为$\alpha$-混合的平稳序列,该文建立了回归函数 $g(t)$ 的小波估计并研究了其相合性、强相合性和收敛速度.

关键词:α-混合;小波估计;相合性;收敛速度.

MR(2000)主题分类:62G08　　**中图分类号**:O212.7　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2004)05-597-10

1　引言

考虑如下的非参数回归模型

$$Y_i=g(X_i)+\varepsilon_i,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

通常上述模型有如下两种情况

(Ⅰ)随机设计模型,即 $(X_i,Y_i)'s$ 为随机向量,回归函数 $g(x)=E(Y|X=x)$,误差 $\varepsilon_i=Y_i-g(X_i),i=1,2,\cdots,n$.

(Ⅱ)固定设计模型,即 $X_i's$ 为非随机设计点列,用 $t_i's$ 表示,不失一般性设 $0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n\leqslant 1$,误差 $\varepsilon_i=Y_i-g(t_i)$.

对于上述两种情况,我们感兴趣的都是关于回归函数 $g(x)$ 的估计问题.

关于模型(Ⅰ)

一个常用的估计为如下定义的核估计

$$\hat{g}_1(x)=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}Y_jK(\frac{x-X_j}{h_n})}{\sum\limits_{i=1}^{n}K(\frac{x-X_i}{h_n})}, \tag{2}$$

其中 $K(\cdot)$ 为核函数,$\{h_n\}$为窗宽满足 $h_n\to 0$.

许冰[1]在$\{(X_i,Y_i)\}$为 i.i.d. 序列时研究了估计量 $\hat{g}_1(x)$ 的性质并给出了一系列满意的结果;胡舒合[2]在样本为 φ-混合时给出了 $\hat{g}_1(x)$的强相合性,但在样本为 α-混合时,只是得到了一个初步的结果;许冰[3]进一步给出了 α-混合样本下估计量偏差与独立样本相当的收敛速度.

直到 90 年代小波方法才得以成功地应用到统计尤其是非参数推断中.由于小波对待估函数要求较低而且可以得到一系列满意的大样本性质,所以小波方法得到了广泛的应用.张

收稿日期:2002-03-18;修订日期:2003-04-07

* 基金项目:国家自然科学基金(10171079)资助

双林，沙秋英，程美玉[4]建立了 $g(x)$ 的非线性小波估计，当 $\{X_i, Y_i\}_{i=1}^n$ 为 i. i. d. 样本且 $\{X_i\}$ 服从[0,1]上的均匀分布时，只需满足 $EY^2<\infty$，而不要求 Y 的分布条件和回归函数的光滑条件下证明了平方积分损失下此估计量的一致相合性.

关于模型（Ⅱ）

Priestley 和 Chao[5]对未知函数 $g(x)$ 提出了一种加权核估计

$$\hat{g}_2(x) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{x_i - x_{i-1}}{h_n} K\left(\frac{x - x_i}{h_n}\right), \tag{3}$$

其中 $K(\cdot)$ 和 h_n 定义如前.

在独立情形下，许多学者对 $\hat{g}_2(x)$ 的相合性作了深入的研究. 如 Priestley 和 Chao[5]讨论了 $\hat{g}_2(x)$ 的弱相合估计；Benedetti[6]在一定条件下证明了 $\hat{g}_2(x)$ 的强相合性；Schuster 和 Yakowitz[7]讨论了 $\hat{g}_2(x)$ 的一致强相合性；秦永松[8]弱化了[6]中强相合性的条件，并在[9]中将其推广到 φ-混合误差情形；杨善朝[10]弱化了[9]中条件证明了 $\hat{g}_2(x)$ 的强相合性和完全收敛性.

定义 1.1 设 $\{X_j\}$ 为 $r.v.s$，记 $\mathscr{F}_{-\infty}^{j}=\sigma(X_i, i=j, j-1, \cdots)$，$\mathscr{F}_j^{\infty}=\sigma(X_i, i=j, j+1, \cdots)$，定义

$$\alpha(n) = \sup_{A\in\mathscr{F}_{-\infty}^{j},\, B\in\mathscr{F}_{j+n}^{\infty}} |P(AB)-P(A)P(B)|,$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha(n)=0$，则称 $\{X_j\}$ 为 α-混合序列.

由于在许多实际应用中假设误差独立是不太适合的，因而考虑误差为相依情况下的模型(1)是很有意义的. 我们注意到 α-混合的条件比其它的许多混合，例如 m-相依，φ-混合，ρ-混合和绝对正则等都要弱，因而其在实际中适用面更广. 作为一个例子，在适当的假设下，自回归滑动平均(ARMA)时间序列和双线性时间序列是强混合的，并且具有混合系数 $\alpha(n)=O(\mathrm{e}^{-sn})$，此处 $s>0$；而一般的线性时间序列在某些假定下也是强混合的[11].

本文我们将在误差 $\{\varepsilon_i\}$ 为 α-混合平稳序列 且满足 $E\varepsilon_i=0, i=1,2,\cdots,n$ 情形下继续讨论模型（Ⅱ）. 定义 $g(x)$ 的小波估计为

$$\hat{g}(t) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \int_{A_i} E_m(t,s)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $A_1,\cdots,A_n$ 为[0,1]上的分割满足 $t_i\in A_i$，$i=1,2,\cdots,n$ $(A_i=(s_{i-1},s_i])$，$E_m(t,s)$ 为由刻度函数 $\varphi(x)$ 产生的再生核

$$E_0(x,t) = \sum_{j\in Z}\varphi(x-j)\varphi(t-j),$$

$$E_m(x,t) = 2^m E_0(2^m x, 2^m t),$$

其中 $m=m(n)>0$ 是仅依赖于 n 的光滑参数.

本文的基本假设

(A1) $g(\cdot)\in H_v, v>\frac{1}{2}$（即 $\|g\|_v^2=\int|\tilde{g}(w)|^2(1+w^2)^v\mathrm{d}w<\infty$ 其中 $\tilde{g}$ 是 g 的 Fourier 变换）且满足 r-阶($r>0$)Lipschitz 条件；

(A2) φ 有紧支撑集；

(A3) φ 是 q-正则的（即对 $\forall k=0,1,\cdots,q$ 和 $p\in Z$，$\exists C_{pk}>0$，使得 $|\varphi^{(k)}|\leqslant\frac{C_{pk}}{(1+|x|)^p}$ $\forall x\in R$)，其中 q 是正整数；

(A4) 当 $\xi\to\infty$ 时，$|\hat{\varphi}(\xi)-1|=O(\xi)$，其中 $\hat{\varphi}$ 是 φ 的 Fourier 变换；

(A5) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|s_i-s_{i-1}|=O(n^{-1})$.

此外我们用 C 表示一不依赖于 n 的正常数,在不同的地方出现可取不同的值.

2 基本引理

引理 2.1 设 $\varphi(\cdot)$满足(A2)(A3), 则有

1) 对每一整数 $k\geqslant 1$, $\exists\, C_k>0$,使得

$$|E_m(t,s)|\leqslant\frac{2^m C_k}{(1+2^m|t-s|)^k};\quad t,s\in R,m\geqslant 0. \tag{4}$$

2)

$$\sup_{t,m}\int_0^1|E_m(t,s)|\,\mathrm{d}s\leqslant C. \tag{5}$$

3) 若(A5)也满足,则

$$\left|\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s\right|=O\left(\frac{2^m}{n}\right),\ 当\ i=1,2,\cdots,n, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^n\left(\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s\right)^2=O\left(\frac{2^m}{n}\right). \tag{7}$$

证 1) 见[12], 2) 见[13].

3)

$$\begin{aligned}\left|\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s\right|&\leqslant\int_{s_{i-1}}^{s_i}|E_m(t,s)|\,\mathrm{d}s\\&\leqslant\int_{s_{i-1}}^{s_i}\frac{C\cdot 2^m}{(1+2^m|t-s|)^2}\mathrm{d}s\\&\leqslant\int_{s_{i-1}}^{s_i}C\cdot 2^m\mathrm{d}s=O\left(\frac{2^m}{n}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\left(\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s\right)^2&\leqslant\sum_{i=1}^n\int_{A_i}E_m^2(t,s)\mathrm{d}s\int_{A_i}1\mathrm{d}s\\&\leqslant O\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^1E_m^2(t,s)\mathrm{d}s\\&\leqslant O\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^1\left(\frac{C\cdot 2^m}{(1+2^m|t-s|)^2}\right)^2\mathrm{d}s\\&=O\left(\frac{1}{n}\right)2^m\int_{-2^m t}^{2^m(1-t)}(1+|s|)^{-4}\mathrm{d}s\\&\leqslant O\left(\frac{1}{n}\right)2^m\int_{-\infty}^{\infty}(1+|s|)^{-4}\mathrm{d}s=O\left(\frac{2^m}{n}\right).\end{aligned}$$ ▌

引理 2.2[13] 若(A1)(A2)(A4)满足,则

$$\int_0^1E_m(t,s)g(s)\mathrm{d}s=g(t)+O(\eta_m). \tag{8}$$

其中

$$\eta_m=\begin{cases}(\frac{1}{2^m})^{v-\frac{1}{2}}, & \frac{1}{2}<v<\frac{3}{2},\\ \frac{\sqrt{m}}{2^m}, & v=\frac{3}{2},\\ \frac{1}{2^m}, & v>\frac{3}{2}.\end{cases}$$

引理 2.3[14] 设$\{X_n,n\in Z\}$为α-混合序列,$X\in\mathscr{F}_{-\infty}^{k}$,$Y\in\mathscr{F}_{k+n}^{\infty}$满足$E|X|^p<\infty$,$E|Y|^q<\infty$, 其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$,则

$$|EXY-EXEY|\leqslant 10\|X\|_p\|Y\|_q(\alpha(n))^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{9}$$

引理 2.4[15](α-混合序列的 Bernstein 不等式) 设$\{X_i,i\in N\}$为α-混合序列满足$\alpha(n)=O(\rho^n)(0<\rho<1)$,$EX_i=0$,$|X_i|\leqslant 1$;令 $0<\theta<1$,$r=\frac{2}{1-\theta}$,$\sigma=\sup(E^{\frac{1}{r}}|X_i|^r:i\in N)$满足$n^{\frac{1}{2}}\sigma\leqslant 1$,则存在仅依赖于混合系数的常数$C_1$,$C_2$,对$\forall\varepsilon>0$,有

$$P(|\sum_{i=1}^{n}X_i|>\varepsilon)\leqslant C_1\theta^{-1}\exp\{-C_2\varepsilon^{\frac{1}{2}}/(n^{\frac{1}{4}}\sigma^{\frac{1}{2}})\}. \tag{10}$$

引理 2.5[16] 设$1<r\leqslant\infty$,$\{X_n,n\geqslant 1\}$为α-混合序列,$EX_n=0$,$\sup\limits_n E|X_n|^r<\infty$, 对某一$\beta>\frac{r}{r-1}$,$\alpha(n)=O(\log^{-\beta}n)$,则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\to 0,\quad \text{a. s.}. \tag{11}$$

引理 2.6[17] 设$\{Z_k\}_{k=1,2,\cdots}$为α-混合序列满足$EZ_i=0$,$|Z_i|\leqslant S(n)<\infty$, a. s $(i=1,2,\cdots,n)$,则对$\forall n,N\in\mathscr{N}$,$1\leqslant N\leqslant n$和所有$\varepsilon>4NS(n)$,有

$$P(|\sum_{i=1}^{n}Z_i|>\varepsilon)\leqslant 4\exp\{-\varepsilon^2(64\frac{n}{N}D(n,N)+\frac{8}{3}\varepsilon NS(n))^{-1}\}+4\frac{n}{N}\alpha(N), \tag{12}$$

其中 $D(n,m):=\sup\limits_{0\leqslant j\leqslant n-1}E(\sum\limits_{i=j+1}^{(j+m)\wedge n}Z_i)^2(m\leqslant n,a\wedge b=\min(a,b))$.

令

$$R_k(n)\equiv\begin{cases}\sup\limits_{i=1,2,\cdots,n}(E|Z_i|^k)^{\frac{1}{k}}, & 1\leqslant k<\infty,\\ \sup\limits_{i=1,2,\cdots,n} ess\sup\limits_{\omega\in\Omega}|Z_i|, & k=\infty.\end{cases}$$

则有

引理 2.7[17] 设$\{Z_k\}$为α-混合序列满足$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha^{1-\frac{2}{p}}(k)<\infty$,$R_p(n)<\infty$,则对某一$2<p\leqslant\infty$,有

$$Var(\sum_{i=1}^{n}Z_i)\leqslant nR_p^{\,2}(n)(1+20\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{1-\frac{2}{p}}(k)). \tag{13}$$

引理 2.8[14] 设$\{X_i,i\geqslant 1\}$为一α-混合序列满足$EX_i=0$,$|X_i|\leqslant d_i$, a. s., 若存在$D_i\geqslant 0$,$K\geqslant 0$使得$\forall\, 0\leqslant m<M\leqslant n$

$$E(\sum_{i=m+1}^{M}a_{ni}X_i)^2\leqslant K\sum_{i=m+1}^{M}a_{ni}^{\,2}D_i,$$

则对$\forall\, 0\leqslant\theta<1$和$\forall\, r>2$,存在$C(\theta,r)$使得

$$E\left|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}X_i\right|^r\leqslant C\{n^{\theta(r-1)}[\sum_{i=1}^{n}E\left|a_{ni}X_i\right|^r+(\sum_{i=1}^{n}a_{ni}{}^2D_i)^{\frac{r}{2}}]+n^{1-\theta}(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ni}d_i\right|)^r\alpha([n^\theta])\}. \tag{14}$$

3 相合性和强相合性

引理 3.1 设(A1)－(A5)满足，则

1)

$$E\hat{g}(t)-g(t)=O(\eta_m)+O(n^{-r}). \tag{15}$$

2)

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|E\hat{g}(t)-g(t)\right|=O(\eta_m)+O(n^{-r}). \tag{16}$$

证 1)

$$\begin{aligned}\left|E\hat{g}(t)-g(t)\right| &=\left|\sum_{i=1}^{n}g(t_i)\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s-g(t)\right|\\ &\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}(g(t_i)-g(s))E_m(t,s)\mathrm{d}s\right|+\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}E_m(t,s)g(s)\mathrm{d}s-g(t)\right|\\ &\leqslant O(n^{-r})\int_0^1\left|E_m(t,s)\right|\mathrm{d}s+\left|\int_0^1E_m(t,s)g(s)\mathrm{d}s-g(t)\right|,\end{aligned}$$

由引理 2.1(2)和 2.2 得

$$E\hat{g}(t)-g(t)=O(n^{-r})+O(\eta_m).$$

2)

$$\begin{aligned}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|E\hat{g}(t)-g(t)\right| &=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\sum_{i=1}^{n}g(t_i)\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s-g(t)\right|\\ &\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\sum_{i=1}^{n}g(t_i)\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s-\int_0^1E_m(t,s)g(s)\mathrm{d}s\right|\\ &\quad+\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\int_0^1E_m(t,s)g(s)\mathrm{d}s-g(t)\right|\\ &\equiv H_1+H_2.\end{aligned}$$

利用引理 2.2 得 $H_2=O(\eta_m)$

$$\begin{aligned}H_1 &\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}(\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}\left|g(t_i)-g(s)\right|\left|E_m(t,s)\right|\mathrm{d}s)\\ &\leqslant Cn^{-r}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}(\int_0^1\left|E_m(t,s)\right|\mathrm{d}s)=O(n^{-r}).\end{aligned}$$

所以 $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|E\hat{g}(t)-g(t)\right|=O(\eta_m)+O(n^{-r})$. ∎

定理 3.1 设(A1)－(A5)满足，$E|\varepsilon_1|^2<\infty$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha^{\frac{1-a}{1+a}}(k)<\infty(0<a<1)$，$\dfrac{2^m}{n^{\frac{1-a}{2}}}\to 0$，则有

$$\hat{g}(t)\xrightarrow{P}g(t). \tag{17}$$

证 $|\hat{g}(t)-g(t)|\leqslant|\hat{g}(t)-E\hat{g}(t)|+|E\hat{g}(t)-g(t)|$，由引理 3.1(1)知 $|E\hat{g}(t)-g(t)|\to 0$，故下面只需证

$$|\hat{g}(t)-E\hat{g}(t)|\xrightarrow{P}0.$$

令 $a_i=\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s$，$\varepsilon_i'=\varepsilon_i I(|a_i\varepsilon_i|\leqslant n^{-\frac{1+a}{2}})-E\varepsilon_i I(|a_i\varepsilon_i|\leqslant n^{-\frac{1+a}{2}})$，$\varepsilon_i''=\varepsilon_i I(|a_i\varepsilon_i|\geqslant n^{-\frac{1+a}{2}})-E\varepsilon_i I(|a_i\varepsilon_i|\geqslant n^{-\frac{1+a}{2}})$，则

$$|\hat{g}(t)-E\hat{g}(t)|=|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i'|+|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i''|\equiv H_1+H_2,$$

记 $N=[n^{\frac{1-a}{2}}]$，对 $\forall\,\eta>0$，$Nn^{-\frac{1+a}{2}}\to 0$，所以当 n 充分大时有 $\eta>CNn^{-\frac{1+a}{2}}$，利用引理 2.6，2.7 和 $\alpha(k)=\mathrm{o}(k^{-\frac{1+a}{1-a}})$，我们有

$$\begin{aligned}P(H_1>\eta)&\leqslant 4\exp\{-C\eta^2(64\,\frac{n}{N}D(n,N)+\frac{8}{3}\eta Nn^{-\frac{1+a}{2}})^{-1}\}+4\,\frac{n}{N}\alpha(N)\\&\leqslant C\{\exp(-C_1\eta^2n^a)+0(1)\}\to 0,\quad C_1\quad \text{be constant.}\end{aligned}$$

至于 H_2，对 $\forall\,\eta>0$，有

$$\begin{aligned}P(H_2>\eta)&\leqslant\frac{E(H_2)}{\eta}\leqslant\frac{2\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|\sum\limits_{i=1}^nE|\varepsilon''|}{\eta}\\&\leqslant C(\frac{2^m}{n})^2n^{\frac{3+a}{2}}E\varepsilon_1{}^2\leqslant C\,\frac{2^{2m}}{n^{\frac{1-a}{2}}}\to 0.\end{aligned}$$

因而

$$P(|\hat{g}(t)-E\hat{g}(t)|>2\eta)\leqslant P(H_1>\eta)+P(H_2>\eta)\to 0.$$

结论证毕. ▌

定理 3.2 设(A1)－(A5)满足，且 $E|\varepsilon_1|^p<\infty\,(p>2)$，$\alpha(n)=O(\rho^n)\,(0<\rho<1)$，$\frac{2^{2m}n^b}{n^{\frac{1}{2}}}\to 0\,(b>0)$，则

$$\hat{g}(t)\to g(t),\qquad \text{a. s.}.\tag{18}$$

证

$$|\hat{g}(t)-g(t)|\leqslant|\hat{g}(t)-E\hat{g}(t)|+|E\hat{g}(t)-g(t)|,$$

由引理 3.1(1)知 $E\hat{g}(t)-g(t)\to 0$. 因而我们只需证

$$\hat{g}(t)-E\hat{g}(t)\to 0,\qquad \text{a. s.}\ .$$

令

$$a_i=\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s,\ \varepsilon_i'=\varepsilon_i I(|a_i\varepsilon_i|\leqslant n^{-(\frac{1}{2}+b)})-E\varepsilon_i I(|a_i\varepsilon_i|\leqslant n^{-(\frac{1}{2}+b)}),$$

$$\varepsilon_i''=\varepsilon_i I(|a_i\varepsilon_i|\geqslant n^{-(\frac{1}{2}+b)})-E\varepsilon_i I(|a_i\varepsilon_i|\geqslant n^{-(\frac{1}{2}+b)}),$$

$$|\hat{g}(t)-E\hat{g}(t)|=|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i|\leqslant|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i'|+|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i''|\equiv H_1+H_2.$$

至于 H_1，由于 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(E|a_i\varepsilon_i'|^4)^{\frac{1}{4}}\leqslant Cn^{-(\frac{1}{2}+b)}$，所以对 $\forall\,\eta>0$，由引理 2.4 我们得

$$P(H_1>\eta)\leqslant 2C_1\exp(-C_2\eta^{\frac{1}{2}}n^{\frac{b}{2}})\quad(C_1,C_2\text{为常数}).$$

对给定的 η，我们有

$$\sum_n P(H_1>\eta)<\infty.$$

运用 Borel-Cantelli 引理我们得 $H_1\to 0$，a. s.

$$H_2 \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i| \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i''|$$
$$\leqslant C\frac{2^m}{n}\max_i |a_i| n^{\frac{1}{2}+b}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i^{\ 2}+E\varepsilon_i^{\ 2})$$
$$\leqslant C\frac{2^{2m}n^b}{n^{\frac{1}{2}}}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^{\ 2}+E\varepsilon_1^{\ 2}],$$

注意到 $E|\varepsilon_1|^p<\infty(p>2)$，由引理 2.5 有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i^{\ 2}-E\varepsilon_i^{\ 2})\to 0,\qquad \text{a. s.}.$$

所以

$$\limsup_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^{\ 2}<\infty,\qquad \text{a. s.}\ .$$

因此 $H_2\to 0$. a. s.. 定理证毕. ▌

4　收敛速度

定理 4.1　设满足条件(A1)－(A5)，且 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{1-\frac{2}{p}}(k)<\infty, 2<p\leqslant\frac{3+a}{1+a}, 0<a<1, m=c\log_2 n, 0<c<\frac{1-a}{4}, E\varepsilon_1^{\ 2}<\infty$，则

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\hat{g}(t)-g(t)|\xrightarrow{P}0. \tag{19}$$

证　$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\hat{g}(t)-g(t)|\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\hat{g}(t)-E\hat{g}(t)|+\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|E\hat{g}(t)-g(t)|$，由引理 3.1(2)知 $\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|E\hat{g}(t)-g(t)|\to 0$，因而我们只需证

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\hat{g}(t)-E\hat{g}(t)|\xrightarrow{P}0.$$

$$\begin{aligned}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\hat{g}(t)-E\hat{g}(t)| &= \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\int_{A_i}E_m(t,s)\mathrm{d}s\right|\\ &= \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\int_{A_i}E_m(t,s)\sum_{j=1}^{n}I(s_{j-1}<t\leqslant s_j)\mathrm{d}s\right|\\ &\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\int_{A_i}\sum_{j=1}^{n}[E_m(t,s)-E_m(t_j,s)]I(s_{j-1}<t\leqslant s_j)\mathrm{d}s\right|\\ &\quad+\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\int_{A_i}\sum_{j=1}^{n}E_m(t_j,s)I(s_{j-1}<t\leqslant s_j)\mathrm{d}s\right|\\ &\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\int_{A_i}\sum_{j=1}^{n}[E_m(t,s)-E_m(t_j,s)]I(s_{j-1}<t\leqslant s_j)\mathrm{d}s\right|\\ &\quad+\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\int_{A_i}E_m(t_j,s)\mathrm{d}s\right|\\ &\equiv H_1+H_2.\end{aligned}$$

由[18]中的引理 1(在假设(A3)下，$\varphi(\cdot)$ 在 R 上满足 Lipschitz 条件)，则 $E_0(t,\cdot)$关于 t 一致的满足 Lipschitz 条件，于是

$$H_1 \leqslant C \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i| \int_{A_i} \sum_{j=1}^{n} 2^{2m} |t-t_j| I(s_{j-1}<t\leqslant s_j)\mathrm{d}s \leqslant C\frac{2^{2m}}{n^2}\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon_i|,$$

因而对 $\forall\,\eta>0$

$$P(H_1>\eta)\leqslant\frac{E(H_1)}{\eta}$$

$$\leqslant\frac{C}{\eta}\frac{2^{2m}}{n^2}E(\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon_i|)=\frac{C}{\eta}\frac{1}{n^{1-2c}}E|\varepsilon_1|\to 0,\quad n\to 0,$$

令 $a_{ji}=\int_{A_i}E_m(t_j,s)\mathrm{d}s, d=n^{-\frac{1+a}{2}},(0<a<1)$，$\varepsilon_i{}'=\varepsilon_i I(|a_{ji}\varepsilon_i|\leqslant d)-E\varepsilon_i I(|a_{ji}\varepsilon_i|\leqslant d)$，$\varepsilon_i{}''=\varepsilon_i I(|a_{ji}\varepsilon_i|>d)-E\varepsilon_i I(|a_{ji}\varepsilon_i|>d), i=1,2,\cdots,n$，则 $\varepsilon_i=\varepsilon_i{}'+\varepsilon_i{}''$，因此

$$H_2\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\sum_{i=1}^{n}a_{ji}\varepsilon_i{}'|+\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\sum_{i=1}^{n}a_{ji}\varepsilon_i{}''|\equiv H_{21}+H_{22},$$

令 $N=[n^{\frac{1-a}{2}}]$，对 $\forall\,\eta>0$，$Nd\to 0$，所以当 n 充分大时，有 $\eta>CNd$，利用引理 2.6,2.7 和 $\alpha(k)=\mathrm{o}(k^{-\frac{p}{p-2}})$，我们有

$$P(H_{21}>\eta)\leqslant\sum_{j=1}^{n}P(|\sum_{i=1}^{n}a_{ji}\varepsilon_i{}'|>\eta)$$

$$\leqslant C\{n\exp(-C\eta^2 n^a)+\mathrm{o}(n^{-\frac{p(1-a)}{2(p-2)}+\frac{3+a}{2}})\}\to 0.$$

另一方面

$$H_{22}\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon''|\max_{1\leqslant j\leqslant n}|a_{ji}|\leqslant C\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon''|\frac{2^m}{n},$$

所以

$$P(H_{22}>\eta)\leqslant\frac{E(H_{22})}{\eta}\leqslant\frac{C}{\eta}\frac{2^m}{n}E(\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon_i{}''|)\leqslant\frac{C}{n^{\frac{1}{2}-2c-\frac{a}{2}}}\to 0.$$

于是

$$P(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\hat{g}(t)-E\hat{g}(t)|>2\eta)\leqslant P(H_1>\eta)+P(H_2>\eta)\to 0.$$

定理证毕. ▌

定理 4.2 设(A1)－(A5)满足，且 $v>\frac{2}{3}, r\geqslant\frac{1}{7}, m=c\log_2 n(0<c<\frac{1}{7})$，$E|\varepsilon_1|^p<\infty$ $(p>2)$，$\alpha(n)=O(\rho^n)(0<\rho<1)$，则

$$\sup_{1\leqslant t\leqslant 1}|\hat{g}(t)-g(t)|=O(2^{-m})\quad \text{a. s.}.$$

证 $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|\hat{g}(t)-g(t)|\leqslant\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|\hat{g}(t)-E\hat{g}(t)|+\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|E\hat{g}(t)-g(t)|$，由引理 3.1(2)知 $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|E\hat{g}(t)-g(t)|=O(2^{-m})$，所以我们只需证

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\hat{g}(t)-E\hat{g}(t)|=O(2^{-m})\qquad \text{a. s.},$$

用定理 4.1 证明中同样的方法和相同的记号 H_1, H_2，有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\hat{g}(t)-E\hat{g}(t)|\leqslant H_1+H_2,$$

至于 H_1，利用引理 2.5 和定理 3.2 中的证明，得

$$\limsup_{n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon_i|<\infty\quad \text{a. s.},$$

所以

$$2^m H_1 \leqslant C \frac{2^{3m}}{n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} | \varepsilon_i | \to 0 \quad \text{a. s.},$$

关于 H_2，令 $a_{ji} = \int_{A_i} E_m(t_j, s) \mathrm{d}s$，$\varepsilon_i{}' = \varepsilon_i I(|\varepsilon_i| \leqslant 2^{2m}) - E\varepsilon_i I(|\varepsilon_i| \leqslant 2^{2m})$，$\varepsilon_i{}'' = \varepsilon_i I(|\varepsilon_i| > 2^{2m})$，则

$$\begin{aligned} H_2 &\leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n} \Big| \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\varepsilon_i{}' \Big| + \max_{1\leqslant j\leqslant n} \Big| \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\varepsilon_i{}'' \Big| + \max_{1\leqslant j\leqslant n} \Big| \sum_{i=1}^{n} a_{ji}E\varepsilon_i{}'' \Big| \\ &\equiv H_{21} + H_{22} + H_{23}. \end{aligned}$$

对 $\forall j=1,2,\cdots$

$$\begin{aligned} E\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\varepsilon_i{}'\Big)^2 &= E\varepsilon_i{}'^2 \sum_{i=1}^{n} a_{ji} + 20 \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n} (E|\varepsilon_i{}'|^p)^{\frac{2}{p}} \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n} \alpha^{1-\frac{2}{p}}(k-i) |a_{ji}||a_{jk}| \\ &\leqslant E\varepsilon_1^2 \sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2 + 10(E|\varepsilon_1|^p)^{\frac{2}{p}} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-k} \alpha^{1-\frac{2}{p}}(k) [a_{ji}^2 + (a_{j,i+k})^2] \\ &\leqslant C \sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2. \end{aligned}$$

由引理 2.8，对 $\forall r>2$，有

$$\begin{aligned} E\Big|\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\varepsilon_i{}'\Big|^r &\leqslant C\Big\{n^{\theta(r-1)}\Big(\sum_{i=1}^{n} E|a_{ji}\varepsilon_i{}'|^r + \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}{}^2\Big)^{\frac{r}{2}}\Big) + n^{1-\theta}\Big(\sum_{i=1}^{n} |a_{ji}2^{2m}|\Big)^r \alpha([n^\theta])\Big\} \\ &\leqslant C\Big\{n^{\theta(r-1)}\Big[\Big(\frac{2^m}{n}\Big)^{\frac{r}{2}}(2^{2m})^{r-2} + \Big(\frac{2^m}{n}\Big)^{\frac{r}{2}}\Big] + n^{1-\theta}(2^{3m})^r \alpha([n^\theta])\Big\}, \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} P(H_{21} > C2^{-m}) &\leqslant \sum_{j=1}^{n} P\Big(\Big|\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\varepsilon_i{}'\Big| > C2^{-m}\Big) \\ &\leqslant C2^{mr} \sum_{j=1}^{n} E\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\varepsilon_i{}'\Big|^r \\ &\leqslant C\{n^{-(\frac{1}{2}-\frac{7}{2}c)r+\theta(r-1)-4c} + n^{-(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}c)r+\theta(r-1)} + n^{r-\theta+4cr}\alpha([n^\theta])\}, \end{aligned}$$

当 θ 充分小且 r 充分大时，由于 $\alpha(n)=O(\rho^n)(0<\rho<1)$，可得 $\sum_n P(H_{21} > C2^{-m}) < \infty$. 所以由 Borel-Cantelli 引理，我们有 $H_{21}=O(2^{-m})$， a. s.

$$2^m H_{22} \leqslant 2^m \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ji}| \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i| I(|\varepsilon_i| > 2^{2m}) \leqslant C \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i{}^2,$$

又 $E|\varepsilon_i|^p<\infty(p>2)$，利用引理 2.5，有

$$\limsup_{n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i{}^2 < \infty \quad \text{a. s.},$$

因此 $H_{22}=O(2^{-m})$， a. s.

$$2^m H_{23} \leqslant 2^{3m} \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ji}| \leqslant C \frac{2^{4m}}{n} \to 0,$$

所以 $H_{23}=\mathrm{o}(2^{-m})$. 定理证毕. ▌

参 考 文 献

[1] 许冰. 非参数回归函数核估计的强收敛速度. 高校应用数学学报，1990，**5A**:533－540

[2] 胡舒合. 分布自由的回归函数近邻核估计的强相合性. 数学学报，1995，**38**：559－567

[3] 许冰. 强混合样本回归函数估计的强相合性. 数学杂志，1998，**18**(2)：169－174

[4] 张双林，沙秋英，程美玉. 回归函数非线性小波估计的一致强相合性. 应用概率统计，1999，**15**(4)：375－380

[5] Priestley M B, Chao M T. Nonparametric function fitting. J R Statist Soc B, 1972, **34**: 385－392

[6] Benedetti J K. On the nonparametric estimation of regression functions. J R Statist Soc B, 1977, **39**: 248－253

[7] Schuster E, Yukowitz S. Contributions to the theory of nonparametric regression, with application to system identification. Ann Statist, 1979, **7**(1): 139－149

[8] 秦永松. 非参数回归函数估计的一个结果. 工程数学学报,1989，**6**(3)：120－123

[9] 秦永松. 相依误差下非参数回归函数估计的强相合性. 广西师范大学学报，1992，**10**(2)：24－27

[10] 杨善朝. φ-混合误差下非参数回归函数加权核估计的相合性. 高校应用数学学报，1995，**10**A(2)：173－180

[11] Athreya K B, Pantula S G. Mixing properties of harris chains and autoreggressive processes. Journal of Applied Probability,1986, **23**: 880－892

[12] Gilbert G Walter. Wavelets and Other Orthogonal Systems with Application. Florida: CRC press, 1994

[13] Antoniadis A, Gregoire G, Mckeague I M. Wavelet methods for curve estimation. JASA, 1994, **89**: 1340－1352

[14] 杨善朝. α-混合序列和的强大数律及其应用. 高校应用数学学报，1996，**11**A(4):443－449

[15] 胡舒合. φ-混合、α-混合序列和的强大数律. 工程数学学报，1992，**9**(3)：57－63

[16] Shao Qiman. Complete convergence for α-mixing sequences. Statistics and Probability Letters, 1993, **16**: 279－287

[17] Liebescher E. Strong convergence of sums of α-mixing random variables with applications to density estimation. Stochastic Process and Their Application, 1996, **65**: 69－80

[18] 钱志坚，柴根象. Bayes 辨别的小波方法. 同济大学学报，1999，**27**(6)：699－703

Nonparametric Wavelet Estimation of a Fixed Designed Regression Function

Sun Yan　Chai Genxiang

(*Department of Applied Mathematics, Tongji Unversity, Shanghai* 200092)

Abstract: In this article the authors consider the nonparametric regression model: $Y_i = g(t_i) + \varepsilon_i, i = 1, \cdots, n$ where $\{t_i\}$ be a set of fixed designed points and $\{\varepsilon_i\}$ be α-mixing stationary process. Here the authors adopt wavelet method to estimate $g(t)$ and study its consistency, strong consistency and convergence rate.

Key words: α-mixing; Wavelet estimation; Consitency; Convergencerate.

MR(2000) Subject Classification: 62G08