2004,**24A**(4):454－458

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

广义算子值函数可微性的刻画*

[1,2]王湘君 [2]王才士

([1] 中国科学院武汉物理与数学研究所 武汉 430071; [2] 华中科技大学数学系 武汉 430074)

摘要:该文讨论了广义算子值函数的微分，用算子象征刻画了其可微性，并给出了一些例子及应用.

关键词:白噪声分析；广义算子；象征；微分；量子场.

MR(2000)主题分类:60H40; 81S25 **中图分类号**:O211.6 **文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2004)04-454-05

1 引言

1975 年，T. Hida[3] 开创了白噪声分析理论. 它的建立为研究量子场理论提供了一个合适的框架. Z. Y. Huang 和 S. L. Luo[4] 首次将单点的自由场算符看作白噪声分析框架中的广义算子，用广义算子的 Wick 积来解释运算中涉及的算子乘积，使自由场中的形式演算有了严格的数学基础，从而，大量的量子场算符可以视为广义算子值函数. J. Potthoff[5] 讨论了含参数的广义泛函的微分. 本文将推广这一结果，讨论广义算子值函数的可微性. 对此问题的讨论是十分必要的，因为在量子场理论中，人们广泛地应用和接受的是定域场论，即是可以用波动传播微分定律描述的场论. 这有几个理由，而其中重要的一条是，在一个相当的范围内，理论和观察相符合. 但最主要的理由非常简单：不存在令人信服的理论形式，可以避开微分的场方程[2].

下面简要介绍一下本文用到的一些记号与结果，详细的讨论见[1]. 为简单起见，我们采用经典的白噪声分析框架，实际上，本文的结果是可以推广到一般框架下的广义算子值函数上的. 以 H 记 Hilbert 空间 $L^2(\boldsymbol{R}^m)$，其上的内积与范数分别用 $(\cdot,\cdot)$ 及 $|\cdot|$ 表示. 设 $E=\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^m)$，$E^*=\mathscr{S}^*(\boldsymbol{R}^m)$ 分别为 Schwartz 检验函数空间与广义函数空间，则 E 为一可列 Hilbert 核空间，E^* 为其对偶空间，$E\to L^2(\boldsymbol{R}^m)\to E^*$ 构成一 Gelf'and 三元组，我们以 $\{|\cdot|_p\}_{p\in\boldsymbol{R}}$ 表示其上的范数族，以 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 记 $E^*\times E$(or $E\times E^*$) 上的典则双线性型. 经二次量子化手续[1]得到以新的 Gelf'and 三元组 $(E)\to(L^2)\to(E)^*$，此即经典的白噪声分析框架. 我们以 $\|\cdot\|_{p\,p\in\boldsymbol{R}}$ 表示其上的范数族，以 $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ 记 $(E)^*\times(E)$(or $(E)\times(E)^*$) 上的典则双线性型. 对任意 $\xi\in E$，以 $\varepsilon(\xi)$ 记相应于 ξ 的指数向量，则 $\{\varepsilon(\xi)\,|\,\xi\in E\}$ 为 (L^2) 中的完全集. 对任一拓扑向量空间 X，我们用 X_C 表示其复化空间. 称从 $(E)_C$ 到 $(E)_C^*$ 的连续线性算子为广义算子. 记 $\mathscr{L}=\mathscr{L}((E)_C,(E)_C{}^*)$ 为全体广义算子构成的线性空间. 对广义算子

收稿日期:2001-12-11; 修订日期:2003-09-25

* 基金项目:国家自然科学基金(10171035)资助

A 定义其象征 $\hat{A}:E\times E\to \boldsymbol{C}$

$$\hat{A}(\xi,\eta)=\ll A\varepsilon(\xi),\varepsilon(\eta)\gg,\quad \forall\,\xi,\eta\in E. \tag{1.1}$$

设 $\mathscr{U}$ 为满足以下两个条件的函数 $G:E\times E\to\boldsymbol{C}$ 构成的线性空间

(H1)（解析性）对任意 $\xi,\xi_1,\eta,\eta_1\in E$，函数 $(z,\omega)\to G(\xi+z\xi_1,\eta+\omega\eta_1)$，$(z,\omega)\in\boldsymbol{R}^2$ 在 $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}$ 上有整解析延拓(仍记为 G).

(H2)（有界性）存在常数 $C_1,C_2>0$ 及 $p\in\boldsymbol{R}$ 使得

$$|G(\xi,\eta)|\leqslant C_1\mathrm{e}^{C_2\{|\xi|_p^2+|\eta|_p^2\}},\quad \forall\,\xi,\eta\in E. \tag{1.2}$$

称每一 $G\in\mathscr{U}$ 为一 U-泛函. 我们有如下重要的刻画定理[1,4]

定理 1.1　若 $K\in\mathscr{L}$,则 $\hat{K}\in\mathscr{U}$;反之,若 $G\in\mathscr{U}$,则存在唯一的广义算子 K,使得 $\hat{K}=G$.

2　广义算子值函数可微性刻画

设 $\mathscr{O}$ 为 $\boldsymbol{R}^d$ 中一开子集，$f(\cdot):\mathscr{O}\to\mathscr{L}$ 为弱可测 $\mathscr{L}$-值函数，即对任意 $\Phi,\Psi\in(E)$，$\ll f(\cdot)\Phi,\Psi\gg$ 为 Borel 可测函数. 首先给出广义算子值函数微分的定义.

定义 2.1　考虑映射 $f:\mathscr{O}\to\mathscr{L}$,设 $\{e_k\}_{k=1,\cdots,d}$ 为 $\boldsymbol{R}^d$ 的标准正交基底，$x_0\in\mathscr{O}$. 如果存在一个广义算子,记作 $(D_kf)(x_0)$,使得极限

$$\lim_{h\to 0}h^{-1}(f(x_0+he_k)-f(x_0))$$

在 $\mathscr{L}$ 中弱收敛于 $(D_kf)(x_0)$,则我们称 f 在 x_0 点 k 方向的(弱)偏导数存在.

注　以下我们讨论的连续与收敛均是在弱拓扑意义下.

若对 $\mathscr{O}$ 中所有点 x,f 在 x 点所有方向的偏导数都存在,且 $\forall\,k=1,\cdots,d$，$x\to D_kf(x)$ 为从 $\mathscr{O}$ 到 $\mathscr{L}$ 的弱连续映射,则我们称 f 在 $\mathscr{O}$ 中弱连续可微. 所有这样的映射构成的空间记作 $C_\omega^1(\mathscr{O};\mathscr{L})$.

由定义 2.1 及刻画定理 1.1,下面的结果是显然的.

命题 2.2　若 $f\in C_\omega^1(\mathscr{O};\mathscr{L})$,则 $\forall\,\Phi,\Psi\in(E)$,$x\to\ll f(x)\Phi,\Psi\gg$ 属于 $C^1(\mathscr{O})$. 其中 $C^1(\mathscr{O})$ 为 $\mathscr{O}$ 上一次连续可微函数全体.

假设对所有 $x\in\mathscr{O}$,$k=1,\cdots,d$,$D_kf(x)\in\mathscr{L}$ 存在,则我们可以重复定义 2.1 中的手续,得到高阶连续可微的概念.

定义 2.3　若对每一多重复指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)$,$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_d\leqslant n$,$\forall\,x\in\mathscr{O}$,弱偏导数 $D_f^\alpha(x)=D_1^{\alpha_1}\cdots D_d^{\alpha_d}f(x)$ 存在,且关于 x 弱连续,则我们称 $f:\mathscr{O}\to\mathscr{L}$ 是 n 次弱连续可微的.

以 $C_\omega^n(\mathscr{O};\mathscr{L})$ 记次弱连续可微映射全体,$C_\omega^0(\mathscr{O};\mathscr{L})\equiv C_\omega(\mathscr{O};\mathscr{L})$ 为从 $\mathscr{O}$ 到 $\mathscr{L}$ 的弱连续映射全体，$C_\omega^\infty(\mathscr{O};\mathscr{L})=\bigcap_n C_\omega^n(\mathscr{O};\mathscr{L})$.

若 V 为一 U-泛函,由象征对应的广义算子记为 $S^{-1}V$. 一个很自然的问题就是在什么条件下,依赖于参数 $x\in\mathscr{O}$ 的 U-泛函的逆变换属于 $C_\omega^n(\mathscr{O};\mathscr{L})$. 为讨论这一问题,首先给出下面的定义

定义 2.4　设 V 为一从 $\mathscr{O}$ 到 $\mathscr{U}$ 的映射. 若 $\forall\,x\in\mathscr{O}$,存在 x 的邻域 $\mathscr{O}_x\subseteq\mathscr{O}$,及 $K_1,K_2>0$，$p_1,p_2\in\boldsymbol{R}$，使得 $\forall\,x'\in\mathscr{O}_x$，$\forall\,\xi,\eta\in E_{\boldsymbol{C}}$，有

$$|V(x')(\xi,\eta)|\leqslant K_1\exp\{K_2(|\xi|_{p_1}^2+|\eta|_{p_2}^2)\},$$

则我们称 V 为局部一致的.

由刻画定理 1.1，作为广义算子其象征要满足有界性条件(H2)，而在点 x 处的微分涉及到点 x 的邻域内的收敛问题，所以广义算子值函数的微分对局部一致性的要求是可以想

见的.

局部一致映射全体记作 $G_{lu}^2(\mathscr{O};\mathscr{U})$. 若对任意 $x\in\mathscr{O}$, $\mathscr{O}_x$ 可以取作 $\mathscr{O}$,则我们称 V 为一致的,一致映射全体记作 $G_u^2(\mathscr{O};\mathscr{U})$.

引理 2.5 设 $V\in G_u^2(\mathscr{O};\mathscr{U})$,则存在 $p,q\geqslant 0$, 使广义算子族 $\{f(x)=S^{-1}V(x), x\in\mathscr{O}\}\subseteq\mathscr{L}((E)_p,(E)_{-q})$,且为 $\mathscr{L}((E)_p,(E)_{-q})$ 中有界集.

证 由于 V 是一致的,此引理实质上刻画定理的一个简单推论. ▌

记 $C_{lu}(\mathscr{O};\mathscr{U})$ 为 $G_{lu}^2(\mathscr{O};\mathscr{U})$ 的一个子集合,且满足条件

(H) $\forall\,\xi,\eta\in E, x\to V(x)(\xi,\eta)$ 连续.

引理 2.6 若 $V\in C_{lu}(\mathscr{O};\mathscr{U})$,则 $f(x)\equiv S^{-1}V(x)\in C_\omega(\{\mathscr{O};L\})$.

证 设 $x\in\mathscr{O}$,则对 x 的某邻域 $\mathscr{O}_x$, $V\in G_u^2(\mathscr{O}_x;\mathscr{U})$,由引理 2.5,存在 $p,q\geqslant 0$, $\{f(x');x'\in\mathscr{O}_x\}$ 为 $\mathscr{L}((E)_p,(E)_{-q})$ 中有界集,不妨设界为 $M>0$,即有

$$\|f(x')\|_{-p,-q}\leqslant M,\quad \forall\,x'\in\mathscr{O}_x. \tag{2.1}$$

$\forall\,\psi_1,\psi_2\in\mathscr{E}$, 映射 $x\to\langle\!\langle f(x)\psi_1,\psi_2\rangle\!\rangle$ 连续.

设 $\varepsilon>0$, $\phi_1,\phi_2\in(E)$ 给定,由于 $\mathscr{E}$ 为 (E) 中的稠密集,可以选 $\psi_1,\psi_2\in\mathscr{E}$,使

$$\|\phi_1\otimes\phi_2-\psi_1\otimes\psi_2\|_{p,q}\leqslant\frac{\varepsilon}{4M}. \tag{2.2}$$

选 δ 足够小,使 $\{x';|x-x'|<\delta\}\subseteq\mathscr{O}_x$,且由 $|x-x'|<\delta$,有

$$|\langle\!\langle f(x)\psi_1,\psi_2\rangle\!\rangle-\langle\!\langle f(x')\psi_1,\psi_2\rangle\!\rangle|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.3}$$

则由(2.1)—(2.3)式,有

$$\begin{aligned}
&|\langle\!\langle f(x)\phi_1,\phi_2\rangle\!\rangle-\langle\!\langle f(x')\phi_1,\phi_2\rangle\!\rangle|\\
\leqslant&|\langle\!\langle f(x)\phi_1,\phi_2\rangle\!\rangle-\langle\!\langle f(x')\psi_1,\psi_2\rangle\!\rangle|\\
&+|\langle\!\langle f(x)\psi_1,\psi_2\rangle\!\rangle-\langle\!\langle f(x')\psi_1,\psi_2\rangle\!\rangle|\\
&+|\langle\!\langle f(x')\psi_1,\psi_2\rangle\!\rangle-\langle\!\langle f(x')\phi_1,\phi_2\rangle\!\rangle|\\
\leqslant&2M\|\phi_1\otimes\phi_2-\psi_1\otimes\psi_2\|_{p,q}+\frac{\varepsilon}{2}\\
\leqslant&\varepsilon,
\end{aligned}$$

由此得到结论. ▌

现在讨论可微性. 设 $n\in\mathbf{N}$,并记 $C_{lu}^n(\mathscr{O};\mathscr{U})$ 为 $G_{lu}^2(\mathscr{O};\mathscr{U})$ 中满足下面两个条件的子集:

(i) $\forall\,\xi,\eta\in E_{\mathbf{C}}, x\to V(x)(\xi,\eta)$ 属于 $C^n(\mathscr{O})$;

(ii) 对每个多重指标 α, $|\alpha|\leqslant n$, $D^\alpha V\in G_{lu}^2(\mathscr{O};\mathscr{U})$.

我们有如下的刻画定理

定理 2.7 设 $V\in C_{lu}^n(\mathscr{O};\mathscr{U})$, $n\in\mathbf{N}$ 或 $n=+\infty$,则 V 对应的广义算子族 $S^{-1}V\in C_\omega^n(\mathscr{O};\mathscr{L})$.

证 先证 $n=1$ 的情形.

记 $D_kf=S^{-1}(D_kV)$, $k=1,\cdots,d$,由假设及引理 2.6,有 $D_kf\in C_\omega(\mathscr{O};\mathscr{L})$. 往证 $\forall\,x\in\mathscr{O}$, ϕ_1, $\phi_2\in(E)$, $k=1,\cdots,d$, 有

$$\lim_{h\to0}\{h^{-1}(\langle\!\langle f(x+he_k)\phi_1,\phi_2\rangle\!\rangle-\langle\!\langle f(x)\phi_1,\phi_2\rangle\!\rangle)-\langle\!\langle D_kf(x)\phi_1,\phi_2\rangle\!\rangle\}=0, \tag{2.4}$$

由假设知(2.4)式对 ϕ_1, $\phi_2\in\mathscr{E}$ 成立. 与引理 2.6 证明相同,我们只需证明存在 $\delta>0$, $p,q\geqslant 0$,使得

$$\{h^{-1}(f(x+he_k)-f(x));0<|h|<\delta\} \tag{2.5}$$

为 $\mathscr{L}((E)_p,(E)_{-q})$ 中的有界集.

设 $x\in\mathscr{O}$, $\mathscr{O}_{x,k}$ 为 x 的一个邻域，且 $D_kV\in G_u^2(\mathscr{O}_{x,k};\mathscr{U})$. 选 δ 足够小，使得 $0<|h|<\delta\Rightarrow x+he_k\in\mathscr{O}_{x,k}$. 设 $\xi,\eta\in E_C$，则由中值定理，存在 $x'\in\mathscr{O}_{x,k}$，使得

$$|h^{-1}(V(x+he_k)(\xi,\eta)-V(x)(\xi,\eta))|=|(D_kV)(x')(\xi,\eta)|,$$

而 $(D_kV)(x')(\xi,\eta)$ 在 $\mathscr{O}_{x,k}$ 是一致的，因此由引理 2.5，存在 $p,q>0$，使(2.5)为 $\mathscr{L}((E)_p,(E)_{-q})$ 中的有界集.

对 $n>1$ 我们用归纳法证明. 设定理对 n 成立，现设 $V\in C_{lu}^{n+1}(\mathscr{O};\mathscr{U})$，则对任意 $k=1,2,\cdots,d$，$\xi,\eta\in E_C$，$x\to D_kV(x)(\xi,\eta)$ 属于 $C^n(\mathscr{O})$，进一步，对任意 α，$|\alpha|=n$，有 $D^\alpha(D_kV)\in G_{lu}^2(\mathscr{O};\mathscr{U})$，即 $D_kV\in C_{lu}^n(\mathscr{O};\mathscr{U})$，由归纳假设，有 $S^{-1}(D_kV)\in C_\omega^n(\mathscr{O};\mathscr{L})$. 所以，定理对 $n+1$ 成立. ▌

3　例子及应用

本节中取 $m=d$.

例 3.1　考虑湮灭及增生算子 ∂_x,∂_x^*，则

$$\hat{\partial}_x(\xi,\eta)=\xi(x)e^{\langle\xi,\eta\rangle},\quad \hat{\partial}_x^*(\xi,\eta)=\eta(x)e^{\langle\xi,\eta\rangle}.$$

由于 $\xi,\eta\in E$，易见 $x\to\hat{\partial}_x$, $x\to\hat{\partial}_x^*$ 都属于 $C_{lu}^\infty(\boldsymbol{R}^m,\mathscr{U})$，由定理 2.7，$\partial_x$，$\partial_x^*\in C_\omega^\infty(\boldsymbol{R}^m,\mathscr{L})$. 实际上，用积分核表示[6]，对多重复指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$，我们有

$$D_\alpha\partial_x=(-1)^{|\alpha|}\Xi_{0,1}(D_\alpha\delta_x),$$
$$D_\alpha\partial_x^*=(-1)^{|\alpha|}\Xi_{1,0}(D_\alpha\delta_x).$$

其中 $D_\alpha\delta_x$ 指广义函数的微分.

例 3.2　设 Q 为 $E\times E$ 上双线性型，且存在常数 $C>0$，及 $p,q\in\boldsymbol{R}$，使得

$$|Q(\xi,\eta)|\leqslant C\{|\xi|_p^2+|\eta|_q^2\},\quad \forall\,\xi,\eta\in E.$$

设 $\lambda(\cdot):\boldsymbol{R}^d\to\boldsymbol{C}$ 为一复值函数，令

$$F_x(\xi,\eta)=\exp\{\lambda(x)Q(\xi,\eta)\},$$

则由刻画定理 $\forall\,x\in\boldsymbol{R}^d$，$F_x$ 为 U-泛函，其对应的广义算子记为 G_x. 若 $\lambda(\cdot)\in C^n(\mathscr{O})$，则由定理 2.7 知 $G\in C_\omega^n(\mathscr{O};\mathscr{L})$. 在量子场论中经常要考虑的就是当 Q 为由 H 中一自伴算子决定的型的情形. 关于用白噪声分析方法讨论型的问题，我们将在以后的文章中详细讨论，也可以参见[5]及其中引用的文献.

例 3.3　考虑 4 维时空的自由场算符

$$\phi_0(t,x)=\int_{\boldsymbol{R}^3}\{\bar{f}_p(t,x)\partial_p^*+f_p(t,x)\partial_p\}\mathrm{d}p,$$

其中

$$f_p(t,x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}}e^{ipx-i\omega_p t},\quad \bar{f}_p(t,x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}}e^{-ipx+i\omega_p t},$$

$$\omega_p=(|p|^2)+m^2)^{\frac{1}{2}}.$$

直接计算 $\phi_0(t,x)$ 的象征，有

$$\phi_0\widehat{(t,x)}(\xi,\eta)=e^{\langle\xi,\eta\rangle}\int_{\boldsymbol{R}^3}\{\bar{f}_p(t,x)\eta(p)+f_p(t,x)\xi(p)\}\mathrm{d}p.$$

由于 $\xi,\eta\in E$，可见 $\phi_0\widehat{(t,\cdot)}\in C_{lu}^\infty(\boldsymbol{R}^3,\mathscr{U})$，所以 $\phi_0(t,x)$ 作为广义算子值函数可以求微分.

由此，自由场的场方程在广义算子值函数意义下是有意义的.

参 考 文 献

[1] 黄志远，严加安. 无穷维随机分析引论. 北京：科学出版社，1997

[2] Bjorken D, Drell S D. Relativistic Quantum Fields. New York: McGraw-Hill, 1965

[3] Hida T. Analysis of Brown Functionals. Carleton Math Lect Notes. Ottawa: Carleton Univ, 1975

[4] Huang Z Y, Luo S L. Quantum white noise and free fields. IDAQP, 1998, **1**: 69—82

[5] Potthoff J. White Noise Approach to Parabolic Stochastic Partial Differential Equation. In: A. I. Cados et al. (eds.). Stochatic Analysis and Application in Physics, NATO ASI Series. Dordrecht: Kluwer Academic, 1994

[6] Obata N. Integral kernel operator on Fock space-generalizations and application to quantum dynamics. Acta Appl Math, 1997, **47**: 49—77

A Characterized Theorem of the Differential of Generalized Operator $\mathscr{L}$-Valued Functions

[1,2] Wang Xiangjun   [2] Wang Caishi

([1] *Wuhan Institute of Physics and Mathematics, the Chinese Academy of Sciences, Wuhan* 430071;
[2] *Huazhong University of Science and Technology, Wuhan* 430074)

Abstract: In this paper, the authors discuss the differential of generalized operator-valued function. A charaterized theorem is obtained, some examples and applications are given.

Key words: White noise analysis; Generalized operator; Symbol; Quantum Field.

MR(2000) Subject Classification: 60H40; 81S25