2004,**24A**(6):717－722

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

两类时滞系统的鲁棒性分析*

[1,2]王志珍　[3]王龙　[2]郁文生

([1] 上海师范大学数理信息学院　上海 200234)

([2] 中国科学院自动化所复杂系统实验室　北京 100080)

([3] 北京大学力学系系统与控制研究中心　北京 100871)

摘要:考虑了两类具有参数不确定性的时滞系统的鲁棒稳定性问题，给出了系统具有鲁棒性能的几个充要条件. 这些结论对于研究具有时滞的反馈控制系统有重要的理论和实践价值.

关键词:整函数；参数不确定性；$\mathscr{D}$-稳定性；圆盘多项式；凸包.

MR(2000)主题分类:93D05;93D09　　**中图分类号:**O175　　**文献标识码:**A

文章编号:1003-3998(2004)06-717-06

1　引言

控制系统的不确定性在自然界中是大量存在的. 笼统的说来，这些不确定性有两种：结构不确定性和模型不确定性. 而参数不确定性作为结构扰动的一大表现形式，来源于实际操作，具有很明显的物理意义，譬如物理元件的实际值与标称值的轻微差异.

人们对鲁棒稳定性的研究兴趣产生于七十年代末. 首当其冲的是 Kharitonov[1] 于 1978 年关于区间多项式给出的一个优美的结果：它指出对于一类参数不确定系统，其稳定性等价于一个仅有四个元素的子集合的稳定性. 如果我们放宽参数约束关系，就一般的单连通域，考虑多项式多角形，这时棱边定理指出系统是鲁棒稳定的当且仅当所有的一维暴露边是稳定的[2]. 此后，这方面的研究逐渐拓宽加深，方法也丰富多样. Chapellat 等人[3] 研究反馈控制系统当对象与控制器同时有参数摄动时的稳定性问题. 这时有广义 Kharitonov 定理(GKT). 研究不确定对象稳定的方法有很多，如 Lyapunov 方法，根估值方法等等.

以上提到的讨论多是针对多项式的. 当系统具有时滞环节时，系统特征多项式是一个非多项式的整函数，有人称之为准多项式. 关于时滞系统的研究工作有很多，多是采用 Lyapunov 方法在时域上加以分析，频率域上的分析较少[4,5,6]. 文献[4]研究的是区间多项式的稳定性问题，Karitonov 在此文中还就一类时滞系统的 l^2 稳定裕度给出计算公式. 文献[5]针对具有时滞的多角形模型，采用棱边的概念，在频率域上研究了鲁棒性能问题. 文献[6]就具有时滞的反馈控制系统，推广了广义 Kharitonov 定理. 在这里我们采用代数的方法，对两类时滞不确定系统加以分析.

收稿日期:2002-04-12；修订日期:2004-03-09

E-mail：wzhzh@water.pku.edu.cn

* 基金项目:国家自然科学基金(60204006、10372002 和 69925307)，中国博士后科学基金，中科院知识创新工程资助

圆盘多项式是指不确定系统的每个系数在一个复圆面上自由变化. 这类模型的鲁棒稳定性问题最初是由 Chapellat, Dahleh 和 Bhattacharyya[7] 提出并解决的. 其中一个漂亮结论是: 一族圆盘多项式的 Hurwitz 稳定性等价于某个标称多项式的稳定性和两个有理函数的无穷范数约束式. 以上文献研究的都是多项式或准多项式的鲁棒稳定性. 这两类函数有一共同特征: 在整个复平面上解析, 因此都属于整函数. 下面, 我们就着眼于两类整函数族的鲁棒性能问题, 在理论上给予分析并讨论其检验的可行性方案.

2 引理与基本概念

设 $Q^0(s), Q^1(s), \cdots, Q^l(s)$ 是 $l+1$ 个给定的整函数. 本文将讨论两类由这 $l+1$ 个整函数衍生的不确定族的鲁棒性问题.

模型 Ⅰ: 圆盘整函数族

$$\mathscr{G}(s)=\{g(s,\alpha): \alpha\in\Pi\}=Q_0(s)+\alpha_1 Q_1(s)+\cdots+\alpha_l Q_l(s),$$
$$\Pi=\{(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)^T\in\mathscr{R}^l: |\alpha_i-\alpha_i^0|\leqslant r_i,\ i=1,\cdots,l\},\tag{1}$$

其中 $\alpha_1^0,\cdots,\alpha_1^0, r_1,\cdots,r_l$ 是给定的 $2l$ 个常数.

模型 Ⅱ: 多角形整函数族

$$\mathscr{Q}(s)=\Big\{\sum_{i=1}^{l}\beta_i Q_i(s): \sum_{i=1}^{l}\beta_i=1, \beta_i\geqslant 0\Big\}.\tag{2}$$

以下约定, 符号 $\|\cdot\|$ 表示向量范数; $|\cdot|$ 表示给定的实数或复数的模; $\partial(\cdot)$ 表示集合的边界; $\mathrm{int}(\cdot)$ 表示集合的内部. 任给复平面上一点 s, 由不确定族的函数值形成的集合称为值集.

我们先从整函数根分布情况着手, 分析整函数族的边界性质.

引理 1 设 A 为复平面 C 上一开集, F 为一度量空间. $f: A\times F\to C$, $\forall z\in A, \eta\in F$, f 关于 η 连续, 关于 z 解析. B 是 A 的一个真的开子集, 即 $B\subsetneqq\bar{B}\subsetneqq A$. 如果 $\forall\eta_0\in F$, $f(z,\eta_0)$ 在 ∂B 上无零点. 则一定存在 η_0 的邻域 $W\subset F$ 满足

1) $\forall\eta\in W, f(z,\eta)$ 在 ∂B 上无零点;

2) $\forall\eta\in W, f(z,\eta)$ 与 $f(z,\eta_0)$ 在 B 中有相同个数的零点.

证 首先, 由 $\bar{B}\subsetneqq A$ 知, ∂B 是有界的闭集, 故 ∂B 是一个紧集. 因为 $f(z,\eta_0)$ 在 ∂B 上不为零, 由 ∂B 的紧性条件知 $\exists\delta_0>0$ 满足 $|f(z,\eta_0)|>\delta_0$. 由 f 关于 η 连续知, 对此 $\delta_0>0$, $\exists\delta_1>0$, 对所有满足 $\|\eta-\eta_0\|<\delta_1$ 的 η 有

$$|f(z,\eta)-f(z,\eta_0)|<\delta_0<|f(z,\eta_0)|,\quad \forall z\in\partial B.\tag{3}$$

$f(z,\eta)$ 在 A 内解析, 利用 Rouché 定理推出 $f(z,\eta_0)$ 与 $f(z,\eta_0)+(f(z,\eta)-f(z,\eta_0))=f(z,\eta)$ 在 B 内有相同个数的零点. 取 $W=\{\eta\in F: \|\eta-\eta_0\|<\delta_1\}$, 则

$$|f(z,\eta)|\geqslant|(|f(z,\eta_0)|-|f(z,\eta_0)-f(z,\eta)|)|>0,\quad \forall z\in\partial B,\ \forall\eta\in W,$$

故 $\forall\eta\in W$, $f(z,\eta)$ 在 ∂B 上无零点. ▍

定义 设 $\mathscr{D}$ 为一给定区域, 若函数 $f(z)$ 的所有零点都在 $\mathscr{D}$ 内, 则称 $f(z)$ 是 $\mathscr{D}$ 稳定的; 如果一族函数都是 $\mathscr{D}$ 稳定的, 则称此函数族是鲁棒 $\mathscr{D}$ 稳定的. $\mathscr{D}$ 稳定性问题也称为鲁棒性能问题.

引理 2 设 $a_0, b_0\in\mathscr{R}^l$, 令 $l(\lambda)=\lambda a_0+(1-\lambda)b_0$, $\lambda\in[0,1]$. 如果 $g(s,l(1))=g(s,a_0)$ 是 $\mathscr{D}$ 稳定的, $g(s,b_0)$ 不是 $\mathscr{D}$ 稳定的, 则一定 $\exists\rho\in[0,1)$, 使得 $g(s,l(\rho))$ 的所有根都在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上, 且 $g(s,l(\rho))$ 必在 $\partial\mathscr{D}$ 上有根.

证 为方便证明，我们采用记号 $l^-(\lambda)$表示赋予线段 $l(\lambda)$一个方向，即其参数 λ 由大到小变化. 根据引理 1，一定存在 a_0 的邻域 $W=\{a:\|a-a_0\|<m_0\}\subset\mathscr{R}^l$ 满足：$\forall a\in W$，$g(s,a)$为 $\mathscr{D}$-稳定. 由于 $g(s,b_0)$不是 $\mathscr{D}$-稳定，所以 $m_0\leqslant\|b_0-a_0\|$，进而$\{a:0<\|a-a_0\|=\frac{m_0}{2}\}\cap l(\lambda)\neq\varnothing$. 设 $a_1=\{\{a:0<\|a-a_0\|=\frac{m_0}{2}\}\cap l^-(\lambda)\}$，则 $g(s,a_1)$是 $\mathscr{D}$-稳定的. 再利用引理 1，一定存在 a_1 的邻域 $W_1=\{a:\|a-a_1\|<m_1\}\subset\mathscr{R}^l$ 满足$\forall a\in W_1,g(s,a)$是 $\mathscr{D}$-稳定的. 同样理由，$m_1\leqslant\|b_0-a_1\|$，取 $a_2=\{a:0<\|a-a_1\|=\frac{m_1}{2}\}\cap l^-(\lambda)\}$. 重复此过程，则得到单调有界序列$\{a_n\}\subset l(\lambda)$，由 $l(\lambda)$为紧集知，可设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\rho\in l(\lambda)$.

1) 如果 $g(s,\rho)$在 $C\backslash\overline{\mathscr{D}}$ 上有根 s_1. 因为 $g(s,\rho)$的根不会布满复平面，则存在 s_1 的某一开邻域 W_{s_1} 满足：$g(s,\rho)$在∂W_{s_1} 上无零点. 取 $B=W_{s_1}$ 应用引理 1，存在 ρ 的某一邻域 W_ρ 满足：$\forall a\in W_\rho,g(s,a)$ 在∂W_{s_1} 上无零点且在 W_{s_1} 内有根. 但是，$W_\rho\cap[a_0,\rho)\neq\varnothing$与$\forall a\in[a_0,\rho),g(s,a)$是 $\mathscr{D}$ 稳定的相互矛盾，故 $g(s,\rho)$的所有根都在$\overline{\mathscr{D}}$上.

2) 如果 $g(s,\rho)$在$\partial\mathscr{D}$ 上没有根. 此时，再次利用引理 1，类似选取$\{a_i\}$一样，必然存在 $\rho_1\in(\rho,b]$及 W_{ρ_1} 使得$\forall a\in W_{\rho_1},g(s,a)$是 $\mathscr{D}$ 稳定的. 重复此过程，得到单调有界序列$\{\rho_n\}$. 构造序列$\{a_1,a_2,\cdots,\rho_1,\cdots\}$，以$\{b_n\}$记之，易知其仍为单调有界的，从而必有极限. 不妨设其极限为 $\bar{\rho}\in l(\lambda)$，由 $\rho_1>\rho$ 知，$\bar{\rho}>\rho$，产生矛盾. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\rho$，而$\{a_n\}\subset\{b_n\}$. 由上所述，引理 2 结论成立. ▎

引理 3 设 $T_1:C\to C$，$T_1(s)=\mathscr{Q}(s)$，则 T_1 关于 $s\in C$ 连续.

3 主要结果

3.1 圆盘整函数

设 $g_0(s)$为不确定函数族 $\mathscr{G}(s)$的标称函数，即

$$g_0(s):=g(s,\alpha_0)=Q_0(s)+\alpha_1^0Q_1(s)+\cdots+\alpha_l^0Q_l(s).$$

令 $E=\bigcup\limits_{s\in\partial\mathscr{D}}\{g(s,\alpha):\alpha\in\Pi\}$. 那么在 $g_0(s)$是 $\mathscr{D}$ 稳定的前提下，有如下判断(1)式鲁棒性能的等价命题. 为简便起见，以下采用 2-范数，即如果 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$，则 $\|x\|^2=\sum\limits_{i=1}^n x_i^2$.

定理 1 若 $g_0(s)$是 $\mathscr{D}$ 稳定的，则 $\mathscr{G}(s)$是鲁棒 $\mathscr{D}$ 稳定的当且仅当 $0\notin E$.

证(必要性) 由 $\mathscr{G}(s)$是 $\mathscr{D}$ 稳定的得到$\forall g(s,\alpha)\in\mathscr{G}(s)$，$\forall s_0\in\partial\mathscr{D}$，$g(s_0,\alpha)\neq0$，故 $0\notin E$.

(充分性) 由 $g_0(s)=g(s,\alpha_0)$是 $\mathscr{D}$ 稳定的，根据根对系数的连续依赖性定理，一定存在 $\eta_i>0$，$T_i:\|\alpha-\alpha_0\|<\eta_i$ 满足$\forall\alpha\in T_i,g(s,\alpha)$的所有根在 $\mathscr{D}$ 内. 令 $T=\bigcup_i T_i$，即所有可能的 T_i 的并. 易知 T 是开的，故可设 $T=\{\alpha:\|\alpha-\alpha_0\|<\eta\}$.

1) 若 $\eta>(\sum\limits_{i=1}^l r_i^2)^{\frac{1}{2}}$，因为 $\forall\alpha\in\Pi$，$\|\alpha-\alpha_0\|\leqslant(\sum\limits_{i=1}^l r_i^2)^{\frac{1}{2}}$ 知 $\alpha\in T$，由 T 定义得到 $g(s,\alpha)$是 $\mathscr{D}$ 稳定的. 从而 $\mathscr{G}(s)$是 $\mathscr{D}$ 稳定的，结论得证.

2) 若 $\eta\leqslant(\sum\limits_{i=1}^l r_i^2)^{\frac{1}{2}}$. 反证. 如果 $\mathscr{G}(s)$不是 $\mathscr{D}$ 稳定的，则会产生矛盾. 根据 T 取法及其开知，$\exists\alpha_1\in\partial T$ 满足：或者 $g(s,\alpha_1)$在$\partial\mathscr{D}$ 上有零点；或者 $g(s,\alpha_1)$所有根在 $C\backslash\overline{\mathscr{D}}$内. 若前一种可能成立，则$\exists s_1\in\partial\mathscr{D},g(s_1,\alpha_1)=0$. 这与 $0\notin E$ 矛盾. 若后一种可能成立，则由引理 1，

存在 α_1 的邻域 U_1 使得 $\forall\alpha\in U_1$，$f(s,\alpha)$ 与 $f(s,\alpha_1)$ 在 $C\backslash\overline{\mathscr{D}}$ 上有相同个数的零点且 $f(s,\alpha)$ 在 $\partial\mathscr{D}$ 上不存在根. 由于 $U_1\cap T\neq\varnothing$，这与 T 的定义相矛盾. 从而 $\mathscr{G}(s)$ 是 $\mathscr{D}$ 稳定的. ▌

如果去掉标称函数的稳定性假设，考虑 $\mathscr{G}(s)$ 的鲁棒 $\mathscr{D}$ 稳定性问题. 对给定的 $s\in\partial\mathscr{D}$，集合 $\mathscr{G}(s)=\left\{Q_0(s)+\sum\limits_{i=1}^{l}\alpha_iQ_i(s),\alpha\in\Pi\right\}$ 是以 $g_0(s)$ 为圆心，以 $\sum\limits_{i=1}^{n}r_i|Q_i(s)|$ 为半径的圆面. 这是因为

$$\begin{aligned}|g(s)-g_0(s)|&=\left|\sum_{i=1}^{l}[\alpha_iQ_i(s)-\alpha_i^0Q_i(s)]\right|=\left|\sum_{i=1}^{l}(\alpha_i-\alpha_i^0)Q_i(s)\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{l}|\alpha_i-\alpha_i^0||Q_i(s)|\leqslant\sum_{i=1}^{l}r_i|Q_i(s)|,\end{aligned}\tag{4}$$

从而我们得到 $\mathscr{G}(s)$ 鲁棒 $\mathscr{D}$ 稳定的另一个等价条件.

定理 2 $\mathscr{G}(s)$ 是鲁棒 $\mathscr{D}$ 稳定的当且仅当

1) $g_0(s)$ 是 $\mathscr{D}$ 稳定的；

2) $|g_0(s)|>\sum\limits_{i=1}^{l}r_i|Q_i(s)|$，$\forall s\in\partial\mathscr{D}$.

证 由 $\mathscr{G}(s)$ 是鲁棒 $\mathscr{D}$ 稳定的，根据定理 1，

$\Leftrightarrow 0\notin E$，$g_0(s)$ 是 $\mathscr{D}$ 稳定的；

$\Leftrightarrow |g_0(s)|>\sum\limits_{i=1}^{l}r_i|Q_i(s)|$，$\forall s\in\partial\mathscr{D}$；$g_0(s)$ 是 $\mathscr{D}$ 稳定的. ▌

3.2 多角形整函数

现在我们考虑不确定模型 $\mathscr{Q}(s)$. 任给复平面上一点 $\hat{s}$，

$$\begin{aligned}\mathscr{Q}(\hat{s})&=\left\{Q(\hat{s}):Q(\hat{s})=\sum_{i=1}^{l}\beta_iQ_i(\hat{s}),\ \sum_{i=1}^{l}\beta_i=1,\ \beta_i\geqslant 0\right\}\\&=\left\{\sum_{i=1}^{l}\beta_iQ_i(\hat{s}):\ \sum_{i=1}^{l}\beta_i=1,\beta_i\geqslant 0\right\}=\mathrm{cov}\{Q_1(\hat{s}),\cdots,Q_l(\hat{s})\}.\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{cov}\{Q_1(\hat{s}),\cdots,Q_l(\hat{s})\}$ 表示 $Q_1(\hat{s}),\cdots,Q_l(\hat{s})$ 的凸包. 换句话说，在复平面上任意一点，不确定函数族的值集等于给定的 l 个函数在这一点上的函数值的凸包.

定理 3 $\mathscr{Q}(s)$ 是鲁棒 $\mathscr{D}$ 稳定的当且仅当以下条件成立

(a) $\forall s\in\partial\mathscr{D}$，$0\notin\mathscr{Q}(s)$；

(b) 存在 $Q_a(s)\in\mathscr{Q}(s)$，满足 $Q_a(s)$ 是 $\mathscr{D}$ 稳定的.

证(必要性) 因为 $\mathscr{Q}(s)$ 是鲁棒 $\mathscr{D}$ 稳定的，所以 $\forall s\in\partial\mathscr{D}$，$\forall Q(s)\in\mathscr{Q}(s)$，$Q(s)\neq 0$，进一步得到(a)，(b).

(充分性)反证. 假设结论不成立，则 $\exists\beta_{a_i}\geqslant 0$，$\beta_{b_i}\geqslant 0$，$\sum\limits_{i=1}^{l}\beta_{a_i}=\sum\limits_{i=1}^{l}\beta_{b_i}=1$ 满足

$$Q_a(s)=\beta_{a_1}Q_1(s)+\cdots+\beta_{a_l}Q_l(s)\text{ 是 }\mathscr{D}\text{ 稳定的；}$$

$$Q_b(s)=\beta_{b_1}Q_1(s)+\cdots+\beta_{b_l}Q_l(s)\text{ 不是 }\mathscr{D}\text{ 稳定的.}$$

令 $\beta_a=(\beta_{a_1},\cdots,\beta_{a_l})^T$，$\beta_b=(\beta_{b_1},\cdots,\beta_{b_l})^T$，由引理 2 知道一定存在 $\rho\in[0,1]$，

$$\beta^{\rho}=(\rho\beta_{a_1}+(1-\rho)\beta_{b_1},\cdots,\rho\beta_{a_l}+(1-\rho)\beta_{b_l})^T:=(\beta_{\rho_1},\cdots,\beta_{\rho_l})^T,$$

使得 $Q_\rho(s)=\beta_{\rho_1}Q_1(s)+\cdots+\beta_{\rho_l}Q_l(s)$ 在 $\partial\mathscr{D}$ 上有根. 因为 $\sum\limits_{i=1}^{l}\beta_{\rho_i}=1$，$\beta_{\rho_i}\geqslant 0$，所以 $Q_\rho(s)\in\mathscr{Q}(s)$，进一步得到 $\exists s_0\in\partial\mathscr{D}$ 满足 $0\in\mathscr{Q}(s_0)$，产生矛盾. ▌

由于 $\mathscr{Q}(s)=\mathrm{cov}\{Q_1(s),\cdots,Q_l(s)\}$，在上述假设下，关于 $\mathscr{Q}(s)$的鲁棒性能问题有

定理 4　$\mathscr{Q}(s)$是鲁棒 $\mathscr{D}$ 稳定的当且仅当以下条件成立

(a)　$\exists s_0\in\partial\mathscr{D}$ 满足 $0\notin\mathscr{Q}(s_0)$；

(b)　$\forall s\in\partial\mathscr{D}$，$0\notin\bigcup\limits_{i\neq j=1}^{l}\{(1-\lambda)Q_i(s)+\lambda Q_j(s),\ \lambda\in[0,1]\}$.

证　必要性显然.

(充分性)假若不然，则 $\mathscr{Q}(s)$不是鲁棒 $\mathscr{D}$ 稳定的，由定理 3 知，一定存在 $s^*\in\partial\mathscr{D}$ 满足 $0\in\mathscr{Q}(s^*)$. 这时一定存在 $\delta_1(s)\in\mathscr{Q}(s)$满足 $\delta_1(s^*)=0$. 由 $\mathscr{Q}(s)=\mathrm{cov}\{Q_1(s),\cdots,Q_l(s)\}$知，$\mathscr{Q}(s)$为复平面 C 上的有界闭集. 从而由 $0\in\mathscr{Q}(s^*)$知，

$$0\in\partial\mathscr{Q}(s^*)\cup\mathrm{int}\mathscr{Q}(s^*).\tag{5}$$

首先说明 $0\in\mathrm{int}\mathscr{Q}(s^*)$. 因为$\partial\mathscr{Q}(s^*)\subset\{(1-\lambda)Q_i(s^*)+\lambda Q_j(s^*)\}$，$\lambda\in[0,1]$，$i\neq j\in\{1,\cdots,l\}$，所以 $0\notin\partial\mathscr{Q}(s^*)$. 由(5)式得到 $0\in\mathrm{int}\mathscr{Q}(s^*)$，即集合 $\mathscr{Q}(s^*)$的内部.

取 $\tau(\lambda)$是连接 s^* 和 s_0 的一条曲线，满足 $\tau(\lambda)\subset\partial\mathscr{D}$ 且 $\tau(1)=s_0$，$\tau(0)=s^*$. 下证必存在 $s_1^*\in\tau(\lambda)$,$s_1^*\neq s^*$ 满足 $0\in\mathscr{Q}(s_1^*)$. 反证. 如果论断不成立，则 $\forall s\in\tau(\lambda)$，如果 $s\neq s^*$，那么 $0\notin\mathscr{Q}(s)$. 由 $\mathscr{Q}(s)$闭知，$C\backslash\mathscr{Q}(s)$开. 由于 $0\in C\backslash\mathscr{Q}(s)$，从而 $\exists\varepsilon>0$，满足 $B_\varepsilon=\{b\in C:|b|<\varepsilon\}\subset C\backslash\mathscr{Q}(s)$，即 $\forall b\in B_\varepsilon$，不存在 $\delta(s)\in\mathscr{Q}(s)$满足 $\delta(s)=b$，$\forall s\in\tau(\lambda)$,$s\neq s^*$. 又由于 $0\in\mathrm{int}\mathscr{Q}(s^*)$而 $\delta_1(s^*)=0$，由 $\delta(s)$关于 s 的连续性知，对上述 $\varepsilon>0$，$\exists\eta>0$ 当 $0<|s-s^*|<\eta$ 时，有 $0<|\delta_1(s)-\delta_1(s^*)|<\varepsilon$，即$|\delta_1(s)|<\varepsilon$. 从而 $\delta_1(s)\in B_\varepsilon$. 取 $s_t\in\tau(\lambda)\cap\{s:0<|s-s^*|<\eta\}$则可知，$\delta_1(s_t)\in B_\varepsilon\subset C\backslash\mathscr{Q}(s_t)$,这与 $\delta_1(s_t)\in\mathscr{Q}(s_t)$矛盾. 故论断成立，即存在 $s_1^*\in\tau(\lambda)$，$s_1^*\neq s^*$ 满足 $0\in\mathscr{Q}(s_1^*)$. 不难看出，$|s_1^*-s_0|<|s^*-s_0|$.

如果 $0\in\mathrm{int}\mathscr{Q}(s_1^*)$，则取 $\tau_1(\lambda)$是连接 s_1^* 和 s_0 的一条曲线，满足 $\tau_1(\lambda)\subset\tau(\lambda)$且 $\tau_1(1)=s_0$，$\tau_1(0)=s_1^*$. 由 $\tau_1(\lambda)$,$\tau(\lambda)$构造知，$\tau_1(\lambda)$是 $\tau(\lambda)$的真子集，且 $\tau_1(1)=\tau(1)=s_0$. 重复上述步骤，必然存在 $s_2^*\in\tau_1(\lambda)$，$s_2^*\neq s_1^*$ 满足 $0\in\mathscr{Q}(s_2^*)$. 易知$|s_2^*-s_0|<|s_1^*-s_0|$. 继续重复此步骤，除非 $0\in\partial\mathscr{Q}(s_2^*)$. 这样，必然存在 $s_3^*\in\tau(\lambda)$满足 $0\in\partial\mathscr{Q}(s_3^*)$. 这是因为 $\tau(1)=s_0$ 满足 $0\notin\mathscr{Q}(s_0)$，故以上过程必然不能沿 $\tau(\lambda)$一直继续到 s_0. 然而 $0\in\partial\mathscr{Q}(s_3^*)$又与条件(b)矛盾. 从而假设不成立，即 $\forall s\in\partial\mathscr{D}$,$0\notin\mathscr{Q}(s)$. 应用定理 3 可知,$\mathscr{Q}(s)$是鲁棒 $\mathscr{D}$ 稳定的. ∎

4　稳定半径分析

下面考虑模型(1)中标称多项式稳定半径的计算问题. 由上面定理知，

$$\mathscr{G}(s)\text{ 是鲁棒 }\mathscr{D}\text{ 稳定的}\Leftrightarrow\begin{cases}|g_0(s)|>\sum\limits_{i=1}^{l}r_i|Q_i(s)|,\ \forall s\in\partial\mathscr{D};\\ g_0(s)\text{ 是 }\mathscr{D}\text{ 稳定的.}\end{cases}$$

若已知 $g_0(s)$是鲁棒 $\mathscr{D}$ 稳定的. 考虑

$$g(s)=\alpha_1Q_1(s)+\cdots+\alpha_lQ_l(s)+Q_0(s),$$
$$g_0(s)=\alpha_1^0Q_1(s)+\cdots+\alpha_l^{\,0}Q_l(s)+Q_0(s).$$

其中$|\alpha_i-\alpha_i^0|<\varepsilon r_i$，$i\in\{1,\cdots,l\}$. 设

$$\varepsilon_{\max}=\max\{\varepsilon:\varepsilon\text{ 满足 }|\alpha_i-\alpha_i^0|<\varepsilon r_i,\text{使得 }\mathscr{G}(s)\text{ 是鲁棒 }\mathscr{D}\text{ 稳定的}\}.$$

则

$$\varepsilon_{\max}=\inf_{s\in\partial\mathscr{D}}|g_0(s)|/|Q_0(s)|+\sum_{i=1}^{l}r_i|Q_i(s)|$$

$$= \min_{s\in\partial\mathscr{D}} |g_0(s)| / |Q_0(s)| + \sum_{i=1}^{l} r_i |Q_i(s)|,$$

这后一个等号成立由于$\partial\mathscr{D}$为紧集. 事实上，如果一个控制器中的参变量的影响度差别不大时，r_i 可都取为 1，也就是说，直接考虑最大的 ε，满足$|\alpha_i-\alpha_i^0|<\varepsilon$ 使得 $\mathscr{G}(s)$鲁棒稳定，则此时计算公式简化为 $\varepsilon_{\max} = \inf_{s\in\partial\mathscr{D}} |g_0(s)| / \sum_{i=1}^{l} |Q_i(s)| = \min_{s\in\partial\mathscr{D}} |g_0(s)| / \sum_{i=1}^{l} |Q_i(s)|$.

参 考 文 献

[1] Kharitonov V L. Asymptotic stability of an equilibriumposition of a family of systems of linear differential equations. Differential Uravnen, 1978, **14**: 2086－2088; Translation in Differential equations, 1979, **14**: 1483－1485

[2] Bartlett A C, Hollot C V, Lin H. Root Location of entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges. Mathematics of Controls, Signals and Systems, 1988, **1**: 61－71

[3] Chapellat H, Bhattacharyya S P. A generalization of Kharitonov's theorem: robust stability of interval plants. IEEE Trans on Automatic Control, 1989, AC－**34**: 306－311

[4] Kharitonov V L. Interval Stability of Quasipolinomials, In: S. P. Bhattacharyya and L. H. Keel, Control of Uncertain, Dynamic Systems, Littleton, MA: CRC Press, 1991. 439－446

[5] Fu M, Barmish B R. Polytopes and polynomials with zeroes in a prescribed set. IEEE Trans on Automatic Control, 1989, AC－**34**: 544－546

[6] Kharritonov V L, Zhabko A P. Robust stability of time delay systems. IEEE Trans. on Automatic Control, 1994, AC－**39**: 2388－2397

[7] Chapellat H, Bhattacharyya S P, Dahleh M. Robust stbilityof a family of disc polynomials. International Journal of Control, 1990, **51**: 1353－1362

[8] Bhattacharyya S P, Chapellat H, Keel L H. Robust Control: The Paramatric Approach. Prentice hall, 1995

[9] Barmish B R. New tools for robustness analysis. In Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control. TX: Austin, 1988. 1－6

Analysis on the Robustness of Two Classes of Uncertain Systems with Time Delay

[1,2] Wang Zhizhen [3] Wang Long [2] Yu Wensheng

([1] *Department of Mathematics, Shanghai Normal University, Shanghai* 200234)

([2] *Institute of Automation, the Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

([3] *Department of Mechanics and Engineering sciences, Peking University, Beijing* 100871)

Abstract: In this paper, the $\mathscr{D}$-stability of two classes of systems with parametric uncertainty and time delay are studied. Several necessary and sufficient conditions are given. The results are useful in theoretic and practical research of feedback control systems with time delay.

Key words: Family of entire functions; Parametric uncertainty; $\mathscr{D}$-stability; Disc polynomial; Convex hull.

MR(2000) Subject Classification: 93D05; 93D09