2004, **24A**(6): 661－668

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

一些非线性发展方程的显式行波解*

刘春平

(扬州大学数学科学学院　扬州 225002)

摘要:该文给出了一种构造非线性发展方程显式行波解的方法,并用该方法得到了 Hirota-Satsuma 方程组,一类非线性常微分方程以及广义耦合标量场方程组的显式行波解.

关键词:行波解;非线性发展方程;Hirota-Satsuma 方程组;广义耦合标量场方程组.

MR(2000)主题分类:35Q53; 35Q72　　**中图分类号**:O175　　**文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2004)06-661-08

1　引言

众所周知,寻找非线性发展方程的精确解长期以来一直是数学工作者和物理工作者极感兴趣的研究课题. 近年来,人们在这方面做了一系列的尝试并成功地求得了许多非线性发展方程的精确解[1-9]. 文献[7,8]通过利用如下截断展开式

$$u(\xi)=\frac{A+By+My^2}{(1+y)^2},\quad y=\mathrm{e}^{k\xi},\tag{1}$$

求得了一些非线性发展方程的精确解. 文献[9]通过假设方程的解具有如下形式

$$u(\xi)=u_0+\frac{B\mathrm{e}^{b\xi}}{(1+\mathrm{e}^{a\xi})^d},\tag{2}$$

也得到了一些非线性发展方程的精确解. 通常,(1)式和(2)式称为试探函数,所以文献[7－9]使用的方法又叫做试探函数方法.

在本文中,我们将通过对试探函数的拓展给出一种构造非线性发展方程行波解的直接方法. 在我们的方法中,关键的步骤是假设方程的解具有幂-指函数的形式,其过程简述如下:对一个给定的非线性发展方程,例如两个独立变量 x, t

$$F(u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},\cdots)=0,\tag{3}$$

为求行波解,先设 $u(x,t)=u(\xi)$, $\xi=x-ct$, 则方程(3)可退化为一个常微分方程. 然后假设方程(3)的解的形式为

$$u(x,t)=u(\xi)=B+\frac{\sum\limits_{i=0}^{2n-1}a_iy^i}{(1+y^2)^n},\quad y=\exp A(\xi+\xi_0),\tag{4}$$

其中 n 是正整数, B, A, c 和 $a_i(i=0,1,\cdots,2n-1)$ 是一些待定常数, ξ_0 是一个任意常数. 首

收稿日期:2002-01-21; 修订日期:2003-01-20

E-mail: yzslcp@pub.yz.jsinfo.net

* 基金项目:国家自然科学基金(10171088)和江苏省教委自然科学基金(01KJB110008)资助

先,通过平衡方程(3)中最高阶导数项和非线性项确定正整数 n 的值.其次,将表达式(4)代入方程(3),令 y^i 的系数为零,可得到关于 A,B,c 和 a_i 的一个代数方程组,解此代数方程组.最后将求得的 A, B, c 和 a_i 代回表达式(4),则可得到方程(3)的显式行波解.因为用该方法求得的解是幂函数和指数函数组合的形式,为了方便起见我们称该方法为广义幂-指函数方法.

广义幂-指函数方法可以用于求解大量的具有各种背景的非线性发展方程.在第二节,我们将研究 Hirota-Satsuma 方程组[10]

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} - 2\alpha v v_x = 0, \tag{5$_a$}$$

$$v_t + 3uv_x + v_{xxx} = 0. \tag{5$_b$}$$

利用广义幂-指函数方法,可以获得方程(5)的三组显式行波解.在第三节,首先考虑一类非线性常微分方程(ODE)

$$u'' = k_0 + k_1 u + k_2 u^2 + k_3 u^3, \quad k_3 \neq 0, \tag{6}$$

其中 $k_i(i=0,1,\cdots,3)$ 是一些参数,一撇表示 $d/d\xi$.利用广义幂-指函数方法,我们可以求得方程(6)的钟状解和扭状解.然后,许多著名的方程,如组合 KdV-mKdV 方程[11],Jaulent-Miodek 方程组[12]和变形 Boussinesq 方程组[13]的显式行波解可以很方便地求得.在第四节,我们讨论广义耦合标量场方程组[14]

$$\sigma'' = \alpha_1\rho + \alpha_2\rho^3 + \alpha_3\sigma\rho^2, \tag{7$_a$}$$

$$\rho'' = \beta_1\sigma + \beta_2\sigma^3 + \beta_3\sigma^2\rho, \tag{7$_b$}$$

其中 α_i, $\beta_i(i=1,2,3)$是一些参数. 当参数满足一定条件时,我们利用广义幂-指函数方法求得了方程(7)的四组显式行波解.

2 Hirota-Satsuma 方程组

为求行波解,设 $u(x,t)=u(\xi)$, $v(x,t)=v(\xi)$, $\xi=x-ct$, 则方程(5)成为

$$-cu' + 6uu' + u''' - 2\alpha vv' = 0, \tag{8$_a$}$$

$$-cv' + 3uv' + v''' = 0. \tag{8$_b$}$$

将$(8)_a$式两边对 ξ 积分一次,取积分常数为 τ_0,则有

$$u'' + 3u^2 - cu - \alpha v^2 + \tau_0 = 0, \tag{9}$$

为了平衡方程$(8)_b$,(9)中最高阶导数项和非线性项,设方程$(8)_b$,(9)的解为

$$u = B_1 + \left(\sum_{i=0}^{3} a_i y^i\right)(1+y^2)^{-2}, \tag{10$_a$}$$

$$v = B_2 + \left(\sum_{i=0}^{3} b_i y^i\right)(1+y^2)^{-2}, \tag{10$_b$}$$

其中 A, c, B_1, B_2, a_i和 $b_i(i=0,1,2,3)$是一些待定常数,ξ_0是一个任意常数.将$(10)_a$式,$(10)_b$式代入$(8)_b$式,(9)式,令 y^i的系数为零,可得到如下的代数方程组

y^9:$(A^2+3B_1-c)b_3=0$,

y^8:$(4A^2+3B_1-c)b_2+3a_3b_3=0$,

y^7:$16A^2b_3-8A^2b_1+3a_0b_1-2a_3b_2-a_2b_3=0$,

y^6:$16A^2b_2-3a_0b_2-a_2b_0-a_2b_2-2a_3b_1-2a_1b_1+4a_3b_3+5a_0b_0=0$,

y^5:$40A^2b_3-40A^2b_1-5a_0b_1-3a_2b_3-2a_3b_2+a_0b_3+2a_1b_2+3a_2b_1+4a_3b_0=0$,

y^4:$16A^2b_0-4a_0b_2-3a_1b_1-2a_2b_0+6a_0b_0+a_1b_3-a_3b_1+3a_3b_3=0$,

$$
\begin{aligned}
&y^3: 8A^2b_3-16A^2b_1-2a_0b_1-4a_1b_0+3a_0b_3+2a_1b_2+a_2b_1=0,\\
&y^2: 4(4A^2+3B_1-c)b_0-6a_0b_2-3a_1b_1+12a_0b_0+3a_3b_3=0,\\
&y^1: (A^2+3B_1-c+3a_0)b_0=0,\\
&y^8: 3B_1^2-\alpha B_2^2-B_1c+\tau_0=0,\\
&y^7: (A^2+6B_1-c)a_3-2\alpha B_2b_3=0,\\
&y^6: (4A^2+6B_1-c)a_2-2\alpha B_2b_2+3a_3^2-\alpha b_3^2=0,\\
&y^5: 4A^2a_1-8A^2a_3+3a_2a_3-3a_0a_1-\alpha b_2b_3+\alpha b_0b_1=0,\\
&y^4: 16A^2a_0-24A^2a_2+\alpha b_0^2-3a_0^2+3(a_2^2+2a_1a_3)-\alpha(b_2^2+2b_1b_3)-6a_3^2+2\alpha b_3^2=0,\\
&y^3: 8A^2a_1-4A^2a_3-3(a_0a_3+a_1a_2-2a_0a_1)+\alpha(b_0b_3+b_1b_2-2b_0b_1)=0,\\
&y^2: 8A^2a_0-3(a_1^2+2a_0a_2)-2(\alpha b_0^2-3a_0^2)+\alpha(b_1^2+2b_0b_2)+3a_3^2-\alpha b_3^2=0,\\
&y^1: (A^2+6B_1-c)a_1-2\alpha B_2b_1+6a_0a_1-2\alpha b_0b_1=0,\\
&y^0: 6B_1a_0-2\alpha B_2b_0-a_0c+3a_0^2-\alpha b_0^2=0.
\end{aligned}\tag{11}
$$

解此代数方程组可得到三组解

（Ⅰ）$a_0=a_1=a_3=b_0=b_1=b_3=0$，$a_2=4\sqrt{c^2-6\tau_0}$，$\alpha b_2^2=24(c^2-6\tau_0)$，

$$A^2=\frac{\sqrt{c^2-6\tau_0}}{4},\quad B_1=\frac{c-\sqrt{c^2-6\tau_0}}{3},\quad B_2^2=\frac{3}{\alpha}B_1^2.\tag{12}$$

（Ⅱ）$a_0=a_1=a_3=b_1=b_3=0$，$a_2=c\pm\sqrt{c^2+24\tau_0}$，$b_0=b_2=-2B_2$，

$$A^2=\frac{c\pm\sqrt{c^2+24\tau_0}}{8},\quad B_1=\frac{c\mp\sqrt{c^2+24\tau_0}}{6},\quad B_2^2=\frac{3\tau_0}{\alpha}.\tag{13}$$

（Ⅲ）$a_0=a_1=a_3=b_0=b_2=0$，$a_2=4(c\pm\sqrt{c^2-12\tau_0})$，$b_1=b_3$，

$$\alpha b_1^2=4(c\mp\sqrt{c^2-12\tau_0})(2c\mp\sqrt{c^2-12\tau_0}),$$

$$A^2=\frac{c\pm\sqrt{c^2-12\tau_0}}{2},\quad B_1=\frac{c\mp\sqrt{c^2-12\tau_0}}{6},\quad B_2=0.\tag{14}$$

将(12)－(14)式分别代回表达式$(10)_a$，$(10)_b$，得到

结论 1　Hirota-Satsuma 方程组有三组显式行波解

（Ⅰ）
$$u_1=\frac{c-4A_1^2}{3}+4A_1^2\operatorname{sech}^2[A_1(x-ct+\xi_0)],\tag{15$_a$}$$

$$v_1=\pm\sqrt{\frac{3}{2\alpha}}\left\{\frac{c-4A_1^2}{3}+4A_1^2\operatorname{sech}^2[A_1(x-ct+\xi_0)]\right\},\tag{15$_b$}$$

其中 $A_1^2=\sqrt{c^2-6\tau_0}/4$. 因 $\xi\to\pm\infty$时，$\operatorname{sech}^2[A_1(\xi+\xi_0)]\to0$，故 $(u_1,v_1)\leftrightarrow$(孤立波解，孤立波解).

（Ⅱ）
$$u_2=\frac{c-4A_2^2}{3}+2A_2^2\operatorname{sech}^2[A_2(x-ct+\xi_0)],\tag{16$_a$}$$

$$v_2=\pm\sqrt{\frac{3\tau_0}{\alpha}}\tanh[A_2(x-ct+\xi_0)],\tag{16$_b$}$$

其中 $A_2^2=(c\pm\sqrt{c^2+24\tau_0})/8$. 因 $\xi\to\pm\infty$时，$\tanh[A_2(\xi+\xi_0)]\to\pm1$（或$\mp1$)，$\operatorname{sech}^2[A_2(\xi+\xi_0)]\to0$，故$(u_2,v_2)\leftrightarrow$(孤立波解,波前解).

（Ⅲ）
$$u_3=\frac{c-A_3^2}{3}+2A_3^2\operatorname{sech}^2[A_3(x-ct+\xi_0)],\tag{17$_a$}$$

$$v_3=\pm\sqrt{\frac{2A_3^2(2A_3^2+c)}{\alpha}}\operatorname{sech}[A_3(x-ct+\xi_0)],\tag{17$_b$}$$

其中 $A_3^2=(c\pm\sqrt{c^2-12\tau_0})/2$. 因 $\xi\to\pm\infty$时，$\operatorname{sech}[A_3(\xi+\xi_0)]\to 0$，故 $(u_3, v_3)\leftrightarrow$(孤立波解，孤立波解).

在(15)—(17)式中，τ_0，ξ_0 和 $c\neq0$ 是任意常数. 特别地，取 $\tau_0=0$，(15)—(17)式成为

(Ⅰ)′
$$u_1=c\operatorname{sech}^2[\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct+\xi_0)], \tag{18}_{\mathrm{a}}$$
$$v_1=\pm\sqrt{\frac{3}{2\alpha}}c\operatorname{sech}^2[\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct+\xi_0)]. \tag{18}_{\mathrm{b}}$$

(Ⅱ)′
$$u_2=\frac{c}{2}\operatorname{sech}^2[\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct+\xi_0)], \tag{19}_{\mathrm{a}}$$
$$v_2=0. \tag{19}_{\mathrm{b}}$$

(Ⅲ)′
$$u_3=2c\operatorname{sech}^2[\sqrt{c}(x-ct+\xi_0)], \tag{20}_{\mathrm{a}}$$
$$v_3=\pm\sqrt{\frac{6}{\alpha}}c\operatorname{sech}[\sqrt{c}(x-ct+\xi_0)]. \tag{20}_{\mathrm{b}}$$

3 方程(6)以及相关的三个物理方程

本节，我们先给出方程(6)的两种显式解：$u\leftrightarrow\operatorname{sech}\theta$，$u\leftrightarrow\tanh\theta$. 然后我们可以很方便地求得一些著名方程的显式行波解. 为了平衡方程(6)中最高阶导数项和非线性项，设方程(6)的解为

$$u=B+\frac{a_0+a_1y}{1+y^2},\quad y=\exp A(\xi+\xi_0), \tag{21}$$

其中 B, A 和 a_0，a_1 是一些待定常数，ξ_0是一个任意常数. 将(21)式代入(6)式，令 y^i的系数为零，可得到一个关于 B, A 和 a_0，a_1的代数方程组，即

y^6：$k_0+k_1B+k_2B^2+k_3B^3=0$,

y^5：$(A^2-k_1-2k_2B-3k_3B^2)a_1=0$,

y^4：$(k_1+2k_2B+3k_3B^2)a_0-4A^2a_0+k_2a_1^2+3k_3B_1a_1^2=0$,

y^3：$2(A^2-k_1-2k_2B-3k_3B^2)a_1-8A^2a_1-2k_2a_0a_1-6k_3B_1a_0a_1-k_3a_1^3=0$,

y^2：$2(k_1+2k_2B+3k_3B^2)a_0+4A^2a_0+k_2(a_0^2+a_1^2)+3k_3[B_1(a_0^2+a_1^2)+a_0a_1^2]=0$,

y^1：$(A^2-k_1-2k_2B-3k_3B^2)a_1-2k_2a_0a_1-3k_3(2B_1a_0a_1+a_0^2a_1)=0$,

y^0：$(k_1^2+2k_2B+3k_3B^2)a_0+k_2a_0^2+k_3(3Ba_0^2+a_0^3)=0$. (22)

我们寻找的是方程(6)的钟状解和扭状解，故分如下两种情况考虑(22)式的解

情形Ⅰ $a_0=0$,

$a_1\neq0$. 由(22)式有

$$a_1^2=-\frac{8}{k_3}(k_1-\frac{k_2^2}{3k_3}),\quad A^2=k_1-\frac{k_2^2}{3k_3},\quad B=-\frac{k_2}{3k_3}, \tag{23}$$

其中参数 k_i 之间有约束关系

$$27k_0k_3{}^2-9k_1k_2k_3+2k_2{}^3=0. \tag{24}$$

情形Ⅱ $a_0\neq0$，$a_1=0$. 由(22)式有

$$a_0^2=-\frac{4}{k_3}(k_1-\frac{k_2^2}{3k_3}),\quad A^2=-\frac{1}{2}(k_1-\frac{k_2^2}{3k_3}),\quad B+\frac{a_0}{2}=-\frac{k_2}{3k_3}, \tag{25}$$

其中参数 k_i 之间也有(24)式的约束关系. 进而，我们有

结论 2 （Ⅰ）当 $k_1-k_2^2/3k_3>0, k_3<0$ 以及(24)式成立时，方程(6)有实的钟状解

$$u=-\frac{k_2}{3k_3}+\frac{a_1}{2}\operatorname{sech}A(\xi+\xi_0), \tag{26}$$

其中
$$a_1^2=-\frac{8}{k_3}(k_1-\frac{k_2^2}{3k_3}), \quad A^2=k_1-\frac{k_2^2}{3k_3}.$$

（Ⅱ）当 $k_1-k_2^2/3k_3<0, k_3>0$，以及(24)式成立时，方程(6)有实的扭状解

$$u=-\frac{k_2}{3k_3}-\frac{a_0}{2}\tanh A(\xi+\xi_0), \tag{27}$$

其中
$$a_0^2=-\frac{4}{k_3}(k_1-\frac{k_2^2}{3k_3}), \quad A^2=-\frac{1}{2}(k_1-\frac{k_2^2}{3k_3}).$$

下面我们用上述结论来求几个著名物理方程的显式行波解.

1）KdV-mKdV 方程[11]

$$u_t+6\alpha uu_x+6\beta u^2u_x+\gamma u_{xxx}=0. \tag{28}$$

设 $u=u(\xi), \xi=x-ct$，则方程(28)成为

$$-cu'+6\alpha uu'+6\beta u^2u'+\gamma u'''=0. \tag{29}$$

将(29)式两边对 ξ 积分一次，取积分常数为 τ_0，则有

$$\tau_0-cu+3\alpha u^2+2\beta u^3+\gamma u''=0, \tag{30}$$

比较(6)式和(30)式，有

$$k_0=-\frac{\tau_0}{\gamma}, \quad k_1=\frac{c}{\gamma}, \quad k_2=-\frac{3\alpha}{\gamma}, \quad k_3=-\frac{2\beta}{\gamma}. \tag{31}$$

根据结论 2，我们得到

结论 3 （Ⅰ）若 $\beta\gamma>0$，则 KdV-mKdV 方程有显式孤立波解

$$u=-\frac{\alpha}{2\beta}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\frac{\alpha}{\beta})^2-\frac{4\tau_0}{\alpha}}\operatorname{sech}\left[\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{2\beta\gamma}-\frac{2\beta\tau_0}{\alpha\gamma}}(x-ct+\xi_0)\right]. \tag{32}$$

（Ⅱ）若 $\beta\gamma<0$，则 KdV-mKdV 方程有显式波前解

$$u=-\frac{\alpha}{2\beta}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{\alpha}{\beta})^2-\frac{4\tau_0}{\alpha}}\tanh\left[\pm\sqrt{-\frac{\alpha^2}{4\beta\gamma}+\frac{\beta\tau_0}{\alpha\gamma}}(x-ct+\xi_0)\right]. \tag{33}$$

其中 $c=-(\alpha^2/\beta+2\beta\tau_0/\alpha)$. τ_0 和 ξ_0 是任意常数.

2）Jaulent-Miodek 方程组[12]

$$u_t+v_x+\frac{3}{2}uu_x=0, \tag{34$_a$}$$

$$v_t+\frac{1}{2}uv_x+uv_x-\frac{1}{4}u_{xxx}=0. \tag{34$_b$}$$

用 $u=u(\xi)$，$v=v(\xi)$，$\xi=x-ct$ 代入(34)式并且两边对 ξ 积分一次，有

$$\tau_0-cu+v+\frac{3}{4}u^2=0, \tag{35$_a$}$$

$$-cv'+\frac{1}{2}uv'+u'v-\frac{1}{4}u'''=0. \tag{35$_b$}$$

将(35)$_a$ 式代入(35)$_b$ 式，然后将(35)$_b$ 式两边对 ξ 再积分一次得到

$$u''=4\tau_1-4(\tau_0+c^2)u+6cu^2-2u^3, \tag{36}$$

其中 τ_0 和 τ_1 是积分常数. 比较(6)式和(36)式，有

$$k_0=4\tau_1, \quad k_1=-4(\tau_0+c^2), \quad k_2=6c, \quad k_3=-2. \tag{37}$$

根据结论 2，我们得到

结论 4 Jaulent-Miodek 方程组有显式孤立波解

$$u = c + A\operatorname{sech}[A(x-ct+\xi_0)], \tag{38$_a$}$$

$$v = -\tau_0 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{Ac}{2}\operatorname{sech}[A(x-ct+\xi_0)] - \frac{3}{4}A^2\operatorname{sech}^2[A(x-ct+\xi_0)], \tag{38$_b$}$$

其中 $A^2 = 2c^2 - 4\tau_0$，τ_0，ξ_0 和 $c \neq 0$ 是任意常数.

3）变形 Boussinesq 方程组[13]

$$u_t + v_x + uv_x = 0, \tag{39$_a$}$$

$$v_t + (uv)_x + u_{xxx} = 0. \tag{39$_b$}$$

类似 Jaulent-Miodek 方程组的求解过程，我们有

结论 5 变形 Boussinesq 方程组有显式解

$$u = c + 2A\tanh[A(x-ct+\xi_0)], \tag{40$_a$}$$

$$v = 2A^2\operatorname{sech}^2[A(x-ct+\xi_0)], \tag{40$_b$}$$

其中 $A^2 = (c^2 - 2\tau_0)/4$，τ_0，ξ_0 和 $c \neq 0$ 是任意常数.（u，v）↔（波前解，孤立波解）.

4 广义耦合标量场方程组

最后，我们利用广义幂-指函数方法求解广义耦合标量场方程组(7). 设

$$\sigma = B_1 + (a_0 + a_1 y)(1+y^2)^{-1}, \tag{41$_a$}$$

$$\rho = B_2 + (b_0 + b_1 y)(1+y^2)^{-1}, \tag{41$_b$}$$

将$(41)_a$ 式，$(41)_b$ 式代入方程(7)，令 y^i 的系数为零，可得到一个关于 A，B_1，B_2，a_i 和 b_i（$i=0,1$）的代数方程组. 然后分如下四种情形讨论

情形 Ⅰ $\quad a_0 \neq 0,\ a_1 = 0,\ b_0 = 0,\ b_1 \neq 0;$ (42)

情形 Ⅱ $\quad a_0 = 0,\ a_1 \neq 0,\ b_0 \neq 0,\ b_1 = 0;$ (43)

情形 Ⅲ $\quad a_0 \neq 0,\ a_1 = 0,\ b_0 \neq 0,\ b_1 = 0;$ (44)

情形 Ⅳ $\quad a_0 = 0,\ a_1 \neq 0,\ b_0 = 0,\ b_1 \neq 0.$ (45)

将(42)－(45)式分别代入代数方程组，通过直接的计算，我们有

结论 6 广义耦合标量场方程组有显式解

（Ⅰ）

$$\sigma_1 = \sqrt{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\tanh\left[\sqrt{\frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_3}{\alpha_2}}(\xi+\xi_0)\right], \tag{46$_a$}$$

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{\alpha_1\beta_3 - 2\alpha_2\beta_1}{\alpha_2\beta_2}}\operatorname{sech}\left[\sqrt{\frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_3}{\alpha_2}}(\xi+\xi_0)\right], \tag{46$_b$}$$

其中参数之间有约束关系

$$\alpha_1\alpha_2\beta_2 + \alpha_1\alpha_3\beta_3 + 2\alpha_2\beta_1\beta_2 - 2\alpha_2\alpha_3\beta_1 - 2\alpha_1\beta_2\beta_3 = 0.$$

（Ⅱ）

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{\alpha_3\beta_1 - 2\alpha_2\beta_2}{\alpha_2\beta_2}}\operatorname{sech}\left[\sqrt{\frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1}{\beta_2}}(\xi+\xi_0)\right], \tag{47$_a$}$$

$$\rho_2 = \sqrt{-\frac{\beta_1}{\beta_2}}\tanh\left[\sqrt{\frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_3\beta_1}{\beta_2}}(\xi+\xi_0)\right], \tag{47$_b$}$$

其中参数之间有约束关系

$$\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_3\beta_1\beta_3 + 2\alpha_1\alpha_2\beta_2 - 2\alpha_2\alpha_3\beta_1 - 2\alpha_1\beta_2\beta_3 = 0.$$

(Ⅲ)′
$$\sigma_3=\sqrt{\frac{\alpha_1(\alpha_3-\beta_2)}{\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3}}\tanh\left[\sqrt{-\frac{\alpha_1}{2}}(\xi+\xi_0)\right],\tag{48a}$$
$$\rho_3=\sqrt{\frac{\alpha_1(\beta_3-\alpha_2)}{\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3}}\tanh\left[\sqrt{-\frac{\alpha_1}{2}}(\xi+\xi_0)\right],\tag{48b}$$
其中参数之间有约束关系
$$\alpha_3\neq\beta_2,\ \alpha_2\neq\beta_3,\ \alpha_1=\beta_1<0.$$
(Ⅲ)″
$$\sigma_3=\sqrt{-\frac{\alpha_1}{\tau}}\tanh\left[\sqrt{-\frac{\alpha_1}{2}}(\xi+\xi_0)\right],\tag{49a}$$
$$\rho_3=\sqrt{\frac{\alpha_1(\beta_3-\tau)}{\beta_2\tau}}\tanh\left[\sqrt{-\frac{\alpha_1}{2}}(\xi+\xi_0)\right],\tag{49b}$$
其中参数之间有约束关系
$$\alpha_3=\beta_2,\ \alpha_2=\beta_3,\ \alpha_1=\beta_1<0.$$
(Ⅳ)′
$$\sigma_4=\sqrt{\frac{2\alpha_1(\alpha_3-\beta_2)}{\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3}}\mathrm{sech}\left[\sqrt{\alpha_1}(\xi+\xi_0)\right],\tag{50a}$$
$$\rho_4=\sqrt{\frac{2\alpha_1(\beta_3-\alpha_2)}{\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3}}\mathrm{sech}\left[\sqrt{\alpha_1}(\xi+\xi_0)\right],\tag{50b}$$
其中参数之间有约束关系
$$\alpha_3\neq\beta_2,\ \alpha_2\neq\beta_3,\ \alpha_1=\beta_1>0.$$
(Ⅳ)″
$$\sigma_4=\sqrt{-\frac{2\alpha_1}{\tau}}\mathrm{sech}\left[\sqrt{\alpha_1}(\xi+\xi_0)\right],\tag{51a}$$
$$\rho_4=\sqrt{\frac{2\alpha_1(\beta_3-\tau)}{\beta_2\tau}}\mathrm{sech}\left[\sqrt{\alpha_1}(\xi+\xi_0)\right],\tag{51b}$$
其中参数之间有约束关系
$$\alpha_3=\beta_2,\ \alpha_2=\beta_3,\ \alpha_1=\beta_1>0.$$
(46)—(51)式中 τ 和 ξ_0 是任意常数.

注记　上述结论和文献[14]的结果一致，但表达形式更加简洁. 利用此结论，我们很容易得到如下耦合标量场方程的三组显式解.
$$\sigma_{xx}=-\sigma+\sigma^3+d\sigma\rho^2,\tag{52a}$$
$$\rho_{xx}=(f-d)\rho+\lambda\rho^3+d\rho\sigma^2.\tag{52b}$$
我们也很容易得到如下另一耦合标量场方程的四组显式解.
$$\sigma_{tt}-c^2\sigma_{xx}=a\sigma-b\sigma^3-b\sigma\rho^2,\tag{53a}$$
$$\rho_{tt}-c^2\rho_{xx}=(a-4e)\rho-b\rho^3-b\rho\sigma^2.\tag{53b}$$
综上所述，我们已经给出了一种构造非线性发展方程显式行波解的方法. 该方法的关键是假设方程的解具有(4)式的形式. 然后，利用该方法我们研究了许多著名的物理方程，这些方程是 1)Hirota-Satsuma 方程组，2)组合 KdV-mKdV 方程，3)Jaulent-Miodek 方程组，4)变形 Boussinesq 方程组，5)广义耦合标量场方程组. 对这些方程，我们成功地求得了它们的若干显式精确解. 据我们所知，其中的一些解尚未在其他文献中出现过，它们对研究相关的物理现象也许是有用的.

参 考 文 献

[1] Ablowitz M J, Zeppefella A. Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed. Bull Math Biol, 1979, **41**: 835—840

[2] Abdelkader M A. Traveling wave solutions for a generalized Fisher equation. J Math Anal Appl, 1982, **85**: 287—290

[3] Wang M L, Zhou Y B, Li Z B. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics. Phys Lett A, 1996, **216**: 67—75

[4] Lu B Q, Qu B Z, Pan Z L, Jiang X F. Exact traveling wave solution of the one class of nonlinear diffusion equations. Phys Lett A, 1993, **175**: 113—115

[5] Liu C P, Zhou R G, Zhou M R. A simple method to construct the traveling wave solutions to nonlinear evolution equations. Phys Lett A, 1998, **246**: 113—116

[6] Fan E G, Zhang H Q. New exact solutions to a system of coupled Kdv equations. Phys Lett A, 1998, **245**:389—392

[7] Wang M X, Xiong S L, Ye Q X. Explicit wave front solutions of Noyes-Field systems for the Belousov-Zhabotinskii reaction. J Math Anal Appl, 1994, **182**: 705—717

[8] Lu H J, Wang M X. Exact solutions of some nonlinear physical models. Phys Lett A, 1999, **255**: 249—252

[9] Liu S K, et al. A simple fast method in finding particular solutions of some nonlinear PDE. Appl Math and Mechanics, 2001, **22**: 326—331

[10] Hirota R, Satsuma J. Soliton solutions of a coupled Kdv equation. Phys Lett A, 1981, **85**: 407—416

[11] Wadati M. Wave propagation in nonlinear lattic. J Phys Soc Jan, 1975, **38**: 673—680

[12] Jaulent M, Miodek K. Nonlinear evolution equations associated with energy-dependent Schrodinger potentials. Lett Math Phys, 1976, **1**: 243—250

[13] Sachs R L. On the integrable variant of the Boussinesq system: Painlevé property, rational solutions, a related many-body system, and equivalence with the AKNS hierarchy. Physica D, 1988, **30**: 1—6

[14] 刘春平. 一类非线性耦合方程组的孤子解. 物理学报, 2000, **49**: 1904—1908

Explicit Traveling Wave Solutions for Some Nonlinear Evolution Equations

Liu Chunping

(*Institute of Mathematics*, *Yangzhou University*, *Yangzhou* 225002)

Abstract: A method to construct the traveling wave solutions to nonlinear evolution equations is presented. The explicit solutions of the Hirota-Satsuma equations, a class of nonlinear ordinary differential equation and the generalized coupled scalar field equations are obtained by using the method.

Key words: Traveling wave solution; Nonlinear evolution equation; Hirota-Satsuma equation; Generalized nonlinear coupled scalar field equations.

MR(2000) Subject Classification: 35Q53; 35Q72