2004,**24A**(5):537－542

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

有 M-P 逆的 Abel 范畴中态射方程 $\alpha x\alpha^*=\beta$ 的非负定解*

赵小妹

(华中师范大学数学与统计学学院 武汉 430079)

孙志敏

(中国科学院数学与系统科学研究院 北京 100080;中国科学院研究生院 北京 100080)

摘要:该文讨论了有 M-P 逆的 Abel 范畴中态射方程 $\alpha x\alpha^*=\beta$ 的非负定解和正定解.作为其应用,给出了 p-除环上矩阵方程 $AXA^*=B$ 的相关结果.

关键词:Abel 范畴;M-P 逆;非负定态射;正定态射.

MR(2000)主题分类:18E10 **中图分类号**:O154.1 **文献标识码**:A

文章编号:1003-3998(2004)05-537-06

1 预备知识

设 $\mathscr{C}$ 是一个范畴,$\varphi:X\to Y$,$\psi:Y\to Z$,是 $\mathscr{C}$ 的两个态射,态射的合成按以下顺序进行

$$\varphi\psi:X\to Z.$$

若对于范畴 $\mathscr{C}$ 中的任一态射 $\varphi:X\to Y$,存在态射 $\varphi^*:Y\to X$,满足 $(\varphi^*)^*=\varphi$,并且当 $\psi:Y\to Z$,有 $(\varphi\psi)^*=\psi^*\varphi^*$,就称 $*$ 是范畴 $\mathscr{C}$ 的一个对合. 显然,若 φ 是单(满)态射,则 φ^* 是满(单)态射;$1_X^*=1_X$;若 $\varphi=\mathrm{Ker}\psi$,则 $\varphi^*=\mathrm{Cok}(\psi^*)$.

$\mathscr{C}$ 是有对合 $*$ 的范畴,$\varphi:X\to Y$ 是 $\mathscr{C}$ 的一个态射,如果存在态射 $\psi:Y\to Z$,使得

$$\varphi\psi\varphi=\varphi,\psi\varphi\psi=\psi,(\varphi\psi)^*=\varphi\psi,(\psi\varphi)^*=\psi\varphi,$$

则称 ψ 是 φ 的关于对合 $*$ 的 Moore-Penrose 逆,简称 M-P 逆.

本文所讨论的范畴 $\mathscr{C}$ 均为具有对合 $*$ 的 Abel 范畴,且每个态射关于对合 $*$ 的 M-P 逆存在.

若态射 $u_1:A_1\to S$,$u_2:A_2\to S$,$p_1:S\to A_1$,$p_2:S\to A_2$,满足 $u_1p_1=1_{A_1}$,$u_2p_2=1_{A_2}$,$u_1p_2=0$,$u_2p_1=0$,$p_1u_1+p_2u_2=1_S$,则记 $\{S,u_1,u_2,p_1,p_2\}=A_1\oplus A_2$. 由[2],对于 $\mathscr{C}$ 中任意两个对象 X、Y,$X\oplus Y$ 总是存在的且基本唯一.

另外,对于 $\varphi:X\to Y$,φ^- 表示 φ 的 1-逆. $D(\varphi)$ 表示 φ 的定义域,即 $D(\varphi)=X$.

引理 1 设 $\eta:X\to Y$ 是 $\mathscr{C}$ 中单态射,则

1)[3] $\eta\eta^*$ 是单位态射;

2) 设 $\eta_1=\mathrm{Ker}\eta^*$,$\eta_1:Z\to Y$,则存在 $\pi:Y\to X$,$\pi_1:Y\to Z$,使得 $\{Y,\eta,\eta_1,\pi,\pi_1\}=X\oplus Z$,即满足

$$\pi\eta+\pi_1\eta_1=1_Y,\eta\pi=1_X,\eta_1\pi_1=1_Z,\eta\pi_1=0,\eta_1\pi=0.$$

---

* 收稿日期:2001-12-24

证 2) 令 $\pi=\eta^*(\eta\eta^*)^{-1}$,则 $\eta\pi=\eta\eta^*(\eta\eta^*)^{-1}=1_X$. 令 $\varepsilon=\pi\eta=\eta^*(\eta\eta^*)^{-1}\eta$,则 ε 是幂等元,且 $\eta_1=\mathrm{Ker}\varepsilon$. 由 $(1_Y-\varepsilon)\varepsilon=0$,则存在 $\pi_1:Y\to Z$,使得 $1_Y-\varepsilon=\pi_1\eta_1$,故 $\eta_1\pi_1\eta_1=\eta_1$, $\eta\pi_1\eta_1=\eta(1-\varepsilon)=\eta-\eta=0$, $\eta_1\pi=0$. 再由 η_1 是单态射,故 $\eta_1\pi_1=1_Z$, $\eta\pi_1=0$, $\eta_1\pi=0$, $\eta\pi=1_X$, $\pi\eta+\pi_1\eta_1=\varepsilon+(1_Y-\varepsilon)=1_Y$. 亦即 $\{Y,\eta,\eta_1,\pi,\pi_1\}=X\oplus Z$. ▌

对偶地,若 $w:X\to Y$ 是 $\mathscr{C}$ 中满态射,则 w^*w 为单位态射.

引理 2 设 $\varphi:X\to Y$ 是 $\mathscr{C}$ 中态射,则 $\varphi\varphi^*=0$ 当且仅当 $\varphi=0$.

证: 设 $\varphi=\varphi_1\varphi_2$ 是满单分解且 $\varphi_1:X\to Z$,若 $\varphi\varphi^*=0$ 则 $\varphi_2\varphi_2^*=0$. 由引理 1, $1_Z=0$,则 $Z=0$,故 $\varphi=0$. 反之,显然成立. ▌

定义 1 设 $\beta:A\to A$ 是 $\mathscr{C}$ 中态射,若存在 $\beta_1:A\to A_1$,使得 $\beta=\beta_1\beta_1^*$,则称 β 是非负定态射. 若 β 还是单位态射,则称 β 是正定态射.

引理 3 β 是非负定态射的充要条件为 $\beta=b\sigma b^*$,其中 b 是满态射, σ 是正定态射.

证 若 β 是非负定的,则 $\beta=\beta_1\beta_1^*$. 设 $\beta_1=bc$ 为满单分解,则 $\beta=bcc^*b^*$,其中 b 是满态射, $\sigma=cc^*$ 是正定态射. 反之,显然. ▌

引理 4[4] 设 $\varphi:X\to Y$, $\psi:X\to Z$ 是范畴 $\mathscr{C}$ 的两个态射,则方程 $\varphi x=\psi$ 有解的充要条件为 $(\mathrm{Ker}\varphi)\psi=0$. 此时,方程通解为

$$x=\varphi^-\psi+(1_Y-\varphi^-\varphi)\xi, \qquad \text{其中 } \xi:Y\to Z \text{ 是任意一个态射.}$$

此外,若 ψ 是满态射,方程通解可表示为

$$x=\varphi^=\psi, \qquad \text{其中 } \varphi^==\varphi^-+(1_Y-\varphi^-\varphi)\xi\psi^-.$$

引理 5 设 $\alpha:A\to B$ 是范畴 $\mathscr{C}$ 的一个态射,则

1) $\mathrm{Cok}\alpha=\mathrm{Coim}(1_B-\alpha^-\alpha)$;

2) $\mathrm{Ker}(\alpha^-\alpha)=\mathrm{Im}(1_B-\alpha^-\alpha)$;

3) $\mathrm{Coim}[(1_B-\alpha^-\alpha)\theta]=\mathrm{Coim}(1_B-\alpha^-\alpha)\Leftrightarrow\mathrm{Ker}\theta\cap\mathrm{Ker}(\alpha^-\alpha)=0$, $\theta:B\to X$.

证 1) 设 $1_B-\alpha^-\alpha=w_1w_2$ 是满单分解,则 $\alpha w_1w_2=\alpha(1_B-\alpha^-\alpha)=0$. 由 w_2 是单态射,故 $\alpha w_1=0$. 若 $\alpha x=0$,则 $x=(1_B-\alpha^-\alpha)x=w_1(w_2x)$. 又 w_1 是满态射,因此, $w_1=\mathrm{Cok}\alpha$,即 $\mathrm{Cok}\alpha=\mathrm{Coim}(1_B-\alpha^-\alpha)$.

2) $1_B-\alpha^-\alpha=w_1w_2$ 是满单分解, $(w_1w_2)(\alpha^-\alpha)=(1_B-\alpha^-\alpha)(\alpha^-\alpha)=0$, w_1 是满态射,故 $w_2(\alpha^-\alpha)=0$. 若 $y(\alpha^-\alpha)=0$,则 $y=y(1_B-\alpha^-\alpha)=(yw_1)w_2$. 又 w_2 是单态射,于是 $w_2=\mathrm{Ker}(\alpha^-\alpha)$. 即 $\mathrm{Ker}(\alpha^-\alpha)=\mathrm{Im}(1_B-\alpha^-\alpha)$.

3) 设 $1_B-\alpha^-\alpha=w_1w_2$, $\theta=\theta_1\theta_2$, $w_2\theta_1=\gamma_1\gamma_2$ 分别为 $1_B-\alpha^-\alpha$, θ, $w_2\theta_1$ 的满单分解,且 $w_1:B\to E_0$, $\theta_1:B\to S$, $\gamma_1:E_0\to E_1$. 则 $w_1\gamma_1=\mathrm{Coim}[(1_B-\alpha^-\alpha)\theta]$, $w_2=\mathrm{Ker}(\alpha^-\alpha)$. 设 $v:V\to B$,且 $v=\mathrm{Ker}\theta\cap\mathrm{Ker}(\alpha^-\alpha)$,再设 $v_1=\mathrm{Ker}\theta$, $v=v_2v_1=v_3w_2$,则 $v_3\gamma_1\gamma_2=v_2v_1\theta_1=0$.

$\Rightarrow$由题设, $w_1=\mathrm{Coim}(1_B-\alpha^-\alpha)=\mathrm{Coim}[(1_B-\alpha^-\alpha)\theta]$,故 γ_1 是单位态射. 由 γ_1 是单位态射, γ_2 是单态射及 $v_3\gamma_1\gamma_2=0$,得 $v_3=0$,从而 $v=v_3w_2=0$,即 $\mathrm{Ker}\theta\cap\mathrm{Ker}(\alpha^-\alpha)=0$.

$\Leftarrow$若 $\mathrm{Ker}\theta\cap\mathrm{Ker}(\alpha^-\alpha)=0$,即 $v=0$,则 $v_3=0$. 设 $\eta_1=\mathrm{Ker}\gamma_1$ 且 $\eta_1:V_1\to E_0$,则 $\eta_1w_2\theta_1=\eta_1\gamma_1\gamma_2=0$. 由 $v_1=\mathrm{Ker}\theta=\mathrm{Ker}\theta_1$,则存在 $\eta_2:V_1\to D(v_1)$,使得 $\eta_1w_2=\eta_2v_1$. 进而,存在 $\eta:V_1\to V$,使得 $\eta_1=\eta v_3$, $\eta_2=\eta v_2$,则 $\eta_1=0$,即 γ_1 为单态射. 又 γ_1 为满态射,故 γ_1 为单位态射,从而 $w_1=\mathrm{Coim}[(1_B-\alpha^-\alpha)\theta]$,因此, $\mathrm{Coim}(1_B-\alpha^-\alpha)=\mathrm{Coim}[(1_B-\alpha^-\alpha)\theta]$. ▌

2 主要结果

定理 1 设 $\alpha:A\to B$, $\beta:A\to A$ 是范畴 $\mathscr{C}$ 的两个态射,并且 $\beta=b\sigma b^*$,其中 $b:A\to D$ 是满态

射，$\sigma:D\to D$ 是正定态射. 则方程 $\alpha x\alpha^*=\beta$ 有非负定解，当且仅当方程 $\alpha y=\beta$ 有解. 此时，$\alpha x\alpha^*=\beta$ 的非负定通解为

$$x=\alpha^{=}\beta(\alpha^{=})^*+(1_B-\alpha^-\alpha)\theta\tau\theta^*(1_B-\alpha^-\alpha)^*,\tag{1}$$

其中$\alpha^{=}=\alpha^-+(1_B-\alpha^-\alpha)\delta b^-$，$\delta:B\to D$ 是任意一个态射；

$\tau=(\mathrm{Cok}u)^*(\mathrm{Cok}u)$，$u$ 是满足 $\sigma=uu^*$ 的任意一个态射；

$\theta:B\to D(\tau)$是任意一个态射.

证　若 x_0 是 $\alpha x\alpha^*=\beta$ 的一个非负定解，则 $\alpha x_0\alpha^*=\beta$，显然 $\alpha y=\beta$ 有解. 反之，若 y_0 是方程 $\alpha y=\beta$ 的一个解，则 $\alpha y_0=b\sigma b^*$. 令 $x_0=[y_0(\sigma b^*)^-]\sigma[y_0(\sigma b^*)^-]^*$，显然 x_0 是非负定的，且 $\alpha x_0\alpha^*=[\alpha y_0(\sigma b^*)^-]\sigma[\alpha y_0(\sigma b^*)^-]^*=b\sigma b^*=\beta$. 故 x_0 为 $\alpha x\alpha^*=\beta$ 的非负定解.

设 x 是方程 $\alpha x\alpha^*=\beta$ 的非负定解，即存在态射 $x_1:B\to C$，使得 $x=x_1x_1^*$. 令 $\eta=\mathrm{Ker}\beta$，于是 $b=\mathrm{Cok}\eta$ 且 $\eta(\alpha x_1)(\alpha x_1)^*\eta^*=\eta\beta\eta^*=0$，所以 $\eta(\alpha x_1)=0$，从而存在 $u_1:D\to C$，使得 $\alpha x_1=bu_1$，则 $bu_1u_1^*b^*=(\alpha x_1)(\alpha x_1)^*=\beta=b\sigma b^*$，故 $u_1u_1^*=\sigma$.

设 $u_2:E\to C$，且 $u_2=\mathrm{Ker}u_1^*$，由引理 1，存在 $p_1:C\to D$，$p_2:C\to E$，使得

$$p_1u_1+p_2u_2=1_C,\ u_1p_1=1_D,\ u_2p_2=1_E,\ u_2p_1=0,u_1p_2=0.$$

令 $x_2=x_1p_1$，$x_3=x_1p_2$，则 $\alpha x_2=\alpha x_1p_1=bu_1p_1=b$，$\alpha x_3=\alpha x_1p_2=bu_1p_2=0$. 由引理 4，存在态射 $\delta:B\to D$，使得 $x_2=\alpha^{=}b$，其中 $\alpha^{=}=\alpha^-+(1_B-\alpha^-\alpha)\delta b^-$. 同时存在态射 $\theta:B\to E$，使得 $x_3=(1_B-\alpha^-\alpha)\theta$，于是 $x_1=x_1(p_1u_1+p_2u_2)=x_2u_1+x_3u_2$，从而

$$\begin{aligned}x=x_1x_1^*&=(x_2u_1)(x_2u_1)^*+(x_3u_2)(x_2u_1)^*+(x_2u_1)(x_3u_2)^*+(x_3u_2)(x_3u_2)^*\\&=\alpha^{=}b\sigma b^*(\alpha^{=})^*+x_3u_2u_1^*x_2^*+x_2u_1u_2^*x_3^*+x_3u_2u_2^*x_3^*\\&=\alpha^{=}\beta(\alpha^{=})^*+(1_B-\alpha^-\alpha)\theta u_2u_2^*\theta^*(1_B-\alpha^-\alpha)^*,\end{aligned}$$

其中

$$u_2=\mathrm{Ker}u_1^*\quad 等价于\ u_2^*=\mathrm{Cok}u_1,$$

故

$$u_2u_2^*=(\mathrm{Cok}u_1)^*(\mathrm{Cok}u_1),\ u_1u_1^*=\sigma.$$

即 x 可表示为(1)式的形式

反之，若 X 如(1)式所示，即 $x=\alpha^{=}\beta(\alpha^{=})^*+(1_B-\alpha^-\alpha)\theta\tau\theta^*(1-\alpha^-\alpha)^*$，其中存在态射 δ,u 使得 $\alpha^{=}=\alpha^-+(1_B-\alpha^-\alpha)\delta b^-$，$\sigma=uu^*$，$\tau=(\mathrm{Cok}u)^*(\mathrm{Cok}u)$. 由 $\alpha y=\beta$ 有解，则 $\alpha\alpha^-\beta=\beta$，从而 $\alpha\alpha^-b=b$，则 $\alpha\alpha^{=}b=b$. 易证 $\alpha x\alpha^*=\beta$

$$x=[\alpha^{=}bu+(1_B-\alpha^-\alpha)\theta(\mathrm{Cok}u)^*][\alpha^{=}bu+(1_B-\alpha^-\alpha)\theta(\mathrm{Cok}u)^*]^*,$$

即 x 是方程 $\alpha x\alpha^*=\beta$ 的非负定解. ▌

推论 1　设条件同定理 1，x 如(1)式所示，$q_1:B\to E_1$，q_1q_2 是$(1_B-\alpha^-\alpha)\theta$ 的满单分解. $\{C_1,u'_1,u'_2,p'_1,p'_2\}=D\oplus E_1$，$\delta=\alpha^{=}bu'_1+q_1u'_2$，则 $\delta=\mathrm{Coim}x$.

证　由定理 1，u 满足 $\sigma=uu^*$. 令

$$u'=(\mathrm{Cok}u)^*,\delta_1=p'_1u+p'_2q_2u',$$

则

$$\begin{aligned}\delta\delta_1&=(\alpha^{=}bu'_1+q_1u'_2)(p'_1u+p'_2q_2u')\\&=\alpha^{=}bu+q_1q_2u'\\&=\alpha^{=}bu+(1_B-\alpha^-\alpha)\theta u',\end{aligned}$$

故

$$x=\delta\delta_1\delta_1^*\delta^*.$$

下证 δ 是满态射，δ_1 是单态射.

设 $y=\mathrm{Cok}\delta$，令 $y_1=u'_1y, y_2=u'_2y$，则

$$\alpha^{=}by_1+q_1y_2=(\alpha^{=}bu'_1+q_1u'_2)y=\delta y=0.$$

由 $\alpha\alpha^{=}b=b, \alpha q_1q_2=\alpha(1-\alpha^{-}\alpha)\theta=0$，则 $\alpha q_1=0$. 故 $by_1=\alpha\alpha^{=}by_1+\alpha q_1y_2=0$，从而 $q_1y_2=0$. 又因为 b, q_1 均为满态射，则 $y_1=0, y_2=0$，故 $y=0$，即 δ 是满态射.

设 $\eta=\mathrm{Ker}\delta_1$，由 $u'=(\mathrm{Cok}u)^*$，有 $u'u^*=0$，则

$$\eta p'_1uu^*=\eta(p'_1u+p'_2q_2u')u^*=\eta\delta u^*=0,$$

故 $\eta p'_1=0$. 由 $\eta\delta_1=0$ 有 $\eta p'_2q_2u'=0$. q_2, u' 均为单态射，则 $\eta p'_2=0$. 从而 $\eta=\eta(p'_1u'_1+p'_2u'_2)=0$，故 δ_1 为单态射，则 $\delta_1\delta_1^*\delta^*$ 是单态射. 因此 $\delta=\mathrm{Coim}x$. ▌

推论 2 设

$$x=\alpha^{=}\beta(\alpha^{=})^*+(1_B-\alpha^{-}\alpha)\theta\tau\theta^*(1_B-\alpha^{-}\alpha)^*,$$

$$x_0=\alpha^{=}\beta(\alpha^{=})^*+(1_B-\alpha^{-}\alpha)\theta_0\tau\theta_0^*(1_B-\alpha^{-}\alpha)^*,$$

其中 $\alpha^{=}, \tau$ 均相同，且 $\tau=(\mathrm{Cok}u)^*(\mathrm{Cok}u)$ 且 $uu^*=\delta, u: D\to E$. 此外，θ_0 满足 $\mathrm{Coim}[(1_B-\alpha^{-}\alpha)\theta_0]=\mathrm{Coim}(1_B-\alpha^{-}\alpha)$.

1）按照 B 的商对象的序，有 $\alpha^{=}b\leqslant\mathrm{Coim}x\leqslant\mathrm{Coim}x_0$；

2）$\mathrm{Coim}x=\mathrm{Coim}x_0$ 当且仅当 $\mathrm{Coim}[(1_B-\alpha^{-}\alpha)\theta]=\mathrm{Coim}(1-\alpha^{-}\alpha)$.

证 1）设 $(1_B-\alpha^{-}\alpha)\theta_0=q_1q_2, (1_B-\alpha^{-}\alpha)=q_0q'_0$ 均为满单分解，且 $q_1: B\to E, q_0: B\to E_0$. 再设 $\{C_1, u'_1, u'_2, p'_1, p'_2\}=D\oplus E_1, \{C_1, u''_1, u''_2, p''_1, p''_2\}=D\oplus E_0$ 以及 $\delta=\alpha^{=}bu_1'+q_1u_2', \delta_0=\alpha^{=}bu''_1+q_0u''_2$，由推论 1，$\delta=\mathrm{Coim}x, \delta_0=\mathrm{Coim}x_0$.

令 $\eta'=\mathrm{Ker}(1-\alpha^{-}\alpha)$，则 $\eta'(1-\alpha^{-}\alpha)\theta_0=0, q_0=\mathrm{Cok}\eta'$. 故 $\eta'q_1=0$，从而存在 $q_3: E_0\to E_1$ 使得 $q_1=q_0q_3$；令 $\varphi=p''_1u'_1+p''_2q_3u'_2$，则

$$\delta_0\varphi=(\alpha^{=}bu''_1+q_0u''_2)(p''_1u'_1+p''_2q_3u'_2)=\alpha^{=}bu'_1+q_0q_3u'_2=\delta,$$

所以

$$\mathrm{Coim}x\leqslant\mathrm{Coim}x_0.$$

由 $\alpha\alpha^{=}b=b$ 及 b 是满态射，故 $\alpha=b$ 是满态射，又 $\delta p'_1=\alpha^{=}b$，则 $\alpha^{=}b\leqslant\mathrm{Coim}x$，因此

$$\alpha^{=}b\leqslant\mathrm{Coim}x\leqslant\mathrm{Coim}x_0.$$

2）若 $\mathrm{Coim}x=\mathrm{Coim}x_0$. 由 φ 为单位态射，故 $u''_2\varphi=u''_2p''_1u'_1+u''_2p''_2q_3u'_2=q_3u'_2$ 及 u''_2 为单态射，φ 为单位态射，故 q_3 为单态射，又 $q_1=q_0q_3$ 且 q_1 为满态射，则 q_3 为满态射，因此 q_3 为单位态射. 因此 $\mathrm{Coim}[(1_B-\alpha^{-}\alpha)\theta]=\mathrm{Coim}[(1_B-\alpha^{-}\alpha)\theta_0]=\mathrm{Coim}(1_B-\alpha^{-}\alpha)$.

若 $\mathrm{Coim}[(1_B-\alpha^{-}\alpha)\theta]=\mathrm{Coim}(1_B-\alpha^{-}\alpha)$，由 1），$\mathrm{Coim}x_0\leqslant\mathrm{Coim}x$，$\mathrm{Coim}x\leqslant\mathrm{Coim}x_0$. 故 $\mathrm{Coim}x_0=\mathrm{Coim}x$. ▌

推论 3 在推论 2 的条件下，下列各条等价

1）x 是正定解；

2）$\mathrm{Coim}[(1_B-\alpha^{-}\alpha)\theta]=\mathrm{Coim}(1_B-\alpha^{-}\alpha)$ 且方程 $by=\alpha$ 有解；

3）$\mathrm{Ker}\theta\cap\mathrm{Ker}(\alpha^{-}\alpha)=0$ 且方程 $by=\alpha$ 有解.

证 令 $x_1=\alpha^{=}bu+(1_B-\alpha^{-}\alpha)\theta(\mathrm{Cok}u)^*$，则 $x=x_1x_1^*$.

1）⇒2）由 x 是正定态射，故 x_1 是单态射. 又 $(\mathrm{Ker}b)(\alpha x_1)(\alpha x_1)^*(\mathrm{Ker}b)^*=0$，由引理 2 $(\mathrm{Ker}b)(\alpha x_1)=0$，从而 $(\mathrm{Ker}b)\alpha=0$. 由引理 3，方程 $by=\alpha$ 有解. $\delta, \delta_0, \varphi$ 的意义同推论 2，$\delta_0\varphi=\delta$. 由 x 是单位态射及 $\delta=\mathrm{Coim}x$，则 δ 是单位态射，于是 δ_0 是单态射，又因为 $\delta_0=\mathrm{Coim}x_0$ 是满态射，从而 δ_0 与 φ 均为单位态射，因此 $\delta_0=\mathrm{Coim}x$，即 $\mathrm{Coim}x=\mathrm{Coim}x_0$. 由推论 2，Coim

$[(1_B-\alpha^-\alpha)\theta]=\mathrm{Coim}(1_B-\alpha^-\alpha)$.

2)⇒1) 设 $\eta_1=\mathrm{Ker}x_1$，则

$$(\eta_1\alpha^= b)uu^* = (\eta_1\alpha^= b)uu^* + \eta_1(1_B-\alpha^-\alpha)\theta(\mathrm{Coku})^* u^* = \eta_1 x_1 u^* = 0.$$

由 $uu^*=\sigma$ 是正定态射，故 $\eta_1\alpha^= b=0$. q_1，q_2 同推论 2 的证明，则

$$\eta_1 q_1 q_2(\mathrm{Coku})^* = \eta_1(1_B-\alpha^-\alpha)\theta(\mathrm{Coku})^* = 0,$$

故 $\eta_1 q_1=0$.

设 $\alpha=\alpha_1\alpha_2$ 是满单分解，由 $q_1=\mathrm{Coim}[(1_B-\alpha^-\alpha)\theta]=\mathrm{Coim}(1_B-\alpha^-\alpha)=\mathrm{Cok}\alpha$，则 $\alpha_2=\mathrm{Ker}q_1$，故存在态射 η'_1，使得 $\eta_1=\eta'_1\alpha_2$. 由 $\alpha_1\alpha_2\alpha^-\alpha=\alpha_1\alpha_2$，则

$$\alpha_2\alpha^-\alpha = \alpha_2, \alpha_2\alpha^= b = \alpha_2\alpha^- b + \alpha_2(1_B-\alpha^-\alpha)\delta = \alpha_2\alpha^- b,$$

所以 $\eta'_1\alpha_2\alpha^- b=\eta'_1\alpha_2\alpha^= b=\eta_1\alpha^= b=0$，又 $by=\alpha$ 有解，不妨设 y_0 是方程 $by=\alpha$ 的一个解. 则 $\eta_1=\eta'_1\alpha_2=\eta'_1\alpha_2\alpha^-\alpha=\eta'_1\alpha_2\alpha^- by_0=0$，即 x_1 是单态射. 由引理 1)，$x=x_1x_1^*$ 是正定态射.

2)⇔3) 由引理 5，即得. ▌

3　应用举例

如果除环 R 存在一个对合反自同构 $\lambda: a\to\bar{a}$，使得对于 R 中任意 k 个不全为零的元素 $a_1,a_2,\cdots,a_k$，恒满足 $\sum_{i=1}^{k} a_i\overline{a_i}\neq 0$，则称 R 是 p-除环.

以非负整数为对象(整数 0 规定为零对象)，p-除环 R 上矩阵为态射构成的范畴 $\mathscr{R}$ 是 Abel 范畴. 设 A 为 $\mathscr{R}$ 中态射，定义 $*: A\to\overline{A'}$，则 $*$ 为 $\mathscr{R}$ 上的一个对合，且 $AA^*=0$ 当且仅当 $A=0$.

定理 2　设 A 是 R 上 $n\times m$ 矩阵，B 为 $n\times n$ 矩阵，$b=rk(B)$，$B=B_1MB_1^*$. 其中 B_1 为列满秩矩阵，M 为正定矩阵，则 $AXA^*=B$ 存在非负定解的充要条件是 $AY=B$ 有解. 方程 $AXA^*=B$ 有非负定解时，其通解为

$$X = A^= B(A^=)^* + (Im-A^-A)VV^*(Im-A^-A)^*, \tag{2}$$

其中 $A^==A^-+(Im-A^-A)ZB_1^-$，Z 是任意一个 $m\times b$ 矩阵.

V 是任意一个 m 行矩阵.

证　由定理 1 $AXA^*=B$ 存在非负定解的充要条件是 $AY=B$ 有解，若 X 是方程的非负定解，则由定理 1，有：$X=A^=B(A^=)^*+(Im-A^-A)WTW^*(Im-A^-A)^*$，其中 $A^==A^-+(Im-A^-A)ZB_1^-$，Z 是某一个 $m\times b$ 阵；$T_{t\times t}(\mathrm{Cok}U)^*(\mathrm{Cok}U)$，$UU^*=M$，$W$ 是某一个 $m\times t$ 矩阵；令 $V=W(\mathrm{Cok}U)^*$，则 $X=A^=B(A^=)^*+(Im-A^-A)VV^*(Im-A^-A)^*$.

即 X 可表为(2)的形式.

反之，当 $AXA^*=B$ 有非负定解，则 $AY=B$ 有解 $AA^-B=B$，所以由(2)表示的矩阵显然为方程 $AXA^*=B$ 的非负定解. ▌

推论 4　在定理 2 的条件下，以下各条成立

1) X 如(2)式所示，则 $rk(X)=rk(B)+rk[(Im-A^-A)V]$；

2) X 的最小秩为 $rk(B)$，最小秩通解如(2)式所示，其中 Z 为任意一个 $m\times b$ 矩阵，且 $V=0$. X 的最大秩为 $rk(B)+n-rk(A)$，最大秩通解如(2)式所示，其中 Z 为任意一个 $m\times b$ 矩阵，V 是满足 $rk(V,A^-A)=m$ 的任意一个矩阵.

3) X 是正定解的充要条件是 X 为最大秩解且 $B_1Y=A$ 有解.

证　1)若 $X=A^=B(A^=)^*+(Im-A^-A)VV^*(Im-A^-A)^*$，由 M 是正定阵，则有矩

阵 M_1，使得 $M=M_1M_1^*$，不妨设 M_1 为 $b\times l$ 矩阵，V 为 $m\times v$ 矩阵. 令 $U_1=(I_v,0)_{l\times(l+v)}$，$U_2=(0,I_v)_{v\times(l+v)}$，$K=\mathrm{Ker}(M_1U_1)^*$. 由 $U_2U_1^*M_1^*=0$，则存在 K_1，使得 $U_2=K_1K$，从而 $VV^*=VU_2U_2^*V^*=(VK_1)(KK^*)(VK_1)^*$，故 $X=A^=B(A^=)^*+(Im-A^-A)(VK_1)(KK^*)(VK_1)^*(Im-A^-A)^*$，且 $K=\mathrm{Ker}(M_1U_1)^*$，$(M_1U_1)(M_1U_1)^*=M_1M_1^*=M$. 由推论 1

$$rk(X)=rk(B)+rk[(Im-A^-A)(VK_1)].$$

由 K_1 行满秩，故 $rk[(Im-A^-A)(VK_1)]=rk[(Im-A^-A)V]$，所以

$$rk(X)=rk(B)+rk[(Im-A^-A)V].$$

由推论 2，3，以及上面的证明，2)，3)显然成立. ▌

致谢 作者衷心感谢李桃生教授对本文的指导.

参 考 文 献

[1] Jurgen Groβ. Nonnegative-definite and positive-definite solutions to the matrix equation $AXA^*=B$-revisited. L A A, 2000, **321**: 123－129

[2] Frey P. Abelian Categories. New York: Harper & Row, 1964

[3] 李桃生. 有满单分解态射的 Moore-Penrose 逆. 数学学报，1993，**36**(1)：60－67

[4] 李桃生. Abel 范畴中的线性态射方程. 华中师范大学学报，1993，**27**：415－418

[5] 李桃生. 范畴与同调代数基础. 武汉：华中师范大学出版社，1988

[6] 李桃生. p-除环上子空间的商与和. 数学物理学报，1995，**15**(4)：467－472

Nonnegative-definite Solutions to the Morphism Equation $\alpha x\alpha^*=\beta$ in Abel Categories with M-P Inverse

Zhao Xiaomei

(*School of Mathematics and Seatistics*, *Central China Normal University*, *Wuhan* 430079)

Sun Zhimin

(*Academy of Mathematics and System Science*, *Beijing* 100080;

Graduate School of the Chinese Academy of Science, *Beijing* 100080)

Abstract: In this paper the authors discuss nonnegative-definite solutions to the morphism equation $\alpha x\alpha^*=\beta$ in Abel categories with M-P inverse. As their application, the authors give some relevant results of the matrix equatiom $AXA^*=B$ over p-division ring.

Key words: Abel categories; M-P inverse; Nonnegative-definite morphism; Positive-definite morphism.

MR(2000) Subject Classification: 18E10