

三阶张弛振子的临界行为

何大初 王大凯 石康杰 杨振海
赵来远 张纪岳

(物理系)

摘 要

本文报道最简单三阶张弛振子的实验电路、映象描述, 及其从准周期向混沌过渡的临界行为的实验研究, 并说明了这些临界行为的普遍意义。我们测得沿临界线准周期集的分数维为: $D=0.88 \pm 0.01$; 以及当绕数逼近黄金分割比时, 映象参数的收敛比平均值为: $\bar{\delta} = -2.85 \pm 0.1$, 这些结果与圆映象理论很好地符合, 从而对 Cumming 等人得出的 $D=0.795 \pm 0.005$ 及 δ_n 的值在 -3.3 ± 0.1 与 -2.7 ± 0.2 之间的结论作了较圆满的解释。

关键词: 三阶张弛振子; 准周期; 混沌; 临界行为; 分数维; 绕数; 圆映象。

由正弦圆映象

$$\varphi_{n+1} = f(\varphi_n) = \varphi_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi \varphi_n \quad (1)$$

导出的非线性系统由准周期向混沌过渡的各个临界标度规律从 1982 年以来取得了很大的成功^[1~3]。在许多临界标度常数中, $D = 0.8700 \pm 3.7 \times 10^{-4}$ ^[4] 和 $\delta = -2.83360 \pm 0.00003$ ^[4] 得到了最广泛的实验验证。^[5] 这里, D 是沿临界线 ($K=1$ 直线) “锁相台阶” 间 “准周期空位” 组成的康托尔集的分数维^[6]; 而 $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Omega_{n-1} - \Omega_n}{\Omega_n - \Omega_{n+1}}$ 则是

当绕数 W 取 $W_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$ 来逼近黄金分割比时, 参数 Ω 的收敛比。其中, Ω_n 是 $W = W_n$ 锁定的 $\Delta\Omega$ 的中点, F_n 是第 n 个 Fibonacci 数。绕数 W 定义为

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(\varphi) - \varphi}{n}$$

Cumming 和 Linsay^[7] 在一个正弦调制张弛振子中以十分精确的测量得到了 $D = 0.795 \pm 0.005$, 以及 δ_n 在 -3.3 ± 0.1 和 -2.7 ± 0.2 之间振荡。我们曾说明最简单的三阶张弛振子—正弦调制锯齿波发生器的动力学行为可用一个“正弦逆圆映象”来描

本文1989年12月26日收到。

述.

$$Q_n = Q_{n+1} - \Omega + \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi Q_{n+1} \quad (2)$$

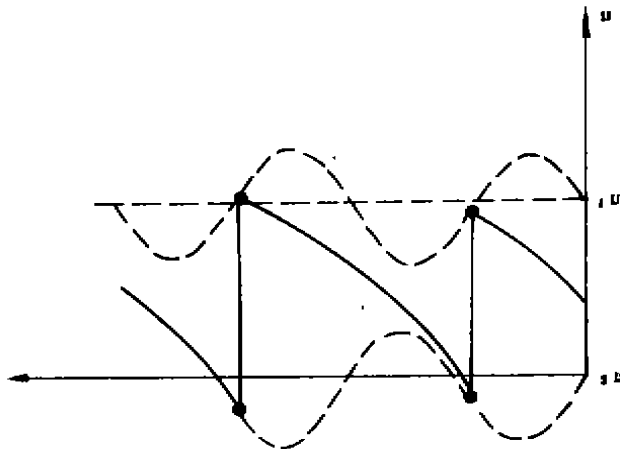


图 1 上下阈值同时受正弦信号调制的张弛振子时域波形图.

它在临界线 (也是 $K=1$ 直线) 上具有和映象 (1) 同样的标度性质^[8]. P.Alstrøm 则证明了只要张弛振荡的下降过程时间为零, 此结果对更一般的上升过程构成的张弛振子仍然适用^[9~10]. L.Glass 等则对更一般的上升、下降时间皆不为零的张弛振子导出了二维圆映象的描述. 此二维圆映象由一个正弦圆映象和一个正弦逆圆映象组成^[11]. 显然, 容易证明, 一般的正弦调制张弛振子也具有和映象 (1) 相同的三阶临界标度性质. 因而 Cumming 等的实验结果^[12]实际上是对圆映象理论的挑战. P.Alstrøm 对 Cumming 实验提出了如下解释^[13]: 当张弛振子的“上阈值”和“下阈值”同时受到正弦调制时 (图 1), $K-\Omega$ 参数平面上同时存在两条临界线. 当 K 增加越过较低的 $K=1$ 临界线时, 系统行为由映象 (2) 支配, 沿临界线仍应得出 $D=0.87$ 及 δ 很快趋近于 -2.83 等三阶临界行为, 然后进入一个准周期空位集分数维 $D=0$ 的“完全锁相区域”; 而当 K 继续增加, 越过位置更高的第二条临界线时, 系统由此“完全锁相区”进入混沌. 由于在实验上只能测出第二条临界线, 所以理论上这种实验应测出 $D=0$, 但这时 D 收敛到 0 的过程非常慢, 所以实际上只能测到小于 0.87 的某一 D 值, 以及 δ_n 在一定范围振荡.

因为 Cumming 等没有发表他们的实验细节^[14], Alstrøm 的解释只是可能的猜测之一. 我们在这里提出另外一种看来是更合理的解释, 即当仅仅张弛振子的“上阈值”受到调制 (这在实验中容易办到), 但下降时间不为 0 时 (这在实验中不可避免), 系统将在 $K-\Omega$ 平面上同样存在类似的两条临界线, 即上述 $K=1$ 临界线, 以及由于不为 0 的下降时间导致的“Arnold 舌头重迭”^[15]所造成的位置更高的第二条临界线. 系统越过第二条临界时将进入比较弱的混沌区域. 这看来正是 Cumming 等所观察到的^[16]. 这样同样可以解释他们测得的 D 和 δ_n .

如果这种设想正确, 那么若在实验中基本消除“下阈值调制”, 同时使张弛振子的下降时间 \ll 上升时间, 则 $K-\Omega$ 平面上我们提出的两条临界线就会非常靠近, 系统仍会在实验测出的临界线 (是上述两条临界线的近似重迭) 上显示通常的三阶圆映象标度行为, 然后越过临界线进入很微弱的混沌区域. 我们按照这种设想所作的实验完全符合这一结论,

从而较完满的解释了 Cumming 实验, 并证实了圆映象理论对张弛振子的普遍性。

我们所用的实验系统仍如前文^[17]所述, 是一个正弦调制恒流闸流管锯齿波发生器。图 2 是它的电原理图。在适当的负栅偏置电压下, 系统只存在“上阈值调制”, 加上栅调制信号后的振荡上阈值电压变化为: $u'_1 = u_1 - \eta A \sin \pi t$, 其中 u_1 是不加调制时的上阈值电压, $A \sin \pi t$ 为下弦调制信号, η 为线性偏置区闸流管的“栅板反射系数”。如果用锯齿振荡时域波形上的特征点 (即上升、下降间的突变点) t_n 来标志振荡, 则容易导出, 上述的“正弦逆圆映象 (2) 的表述^[18]”。这里,

$$Q_{n+1} = \frac{t_{n+1}}{T_0}, \quad \Omega = \frac{c(u_1 - u_2)}{I_a T_a} = \frac{T_s}{T_0}, \quad K = \frac{2\pi C \eta A}{T_a T_0} = 2\pi \Omega \frac{E_0}{E_s} \quad (3)$$

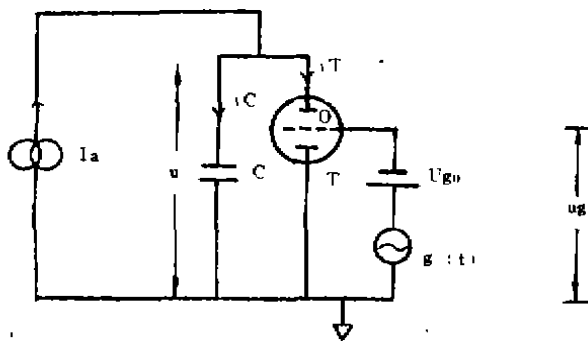


图 2 实验系统的电原理图

$$u_{g0} = -7.00V, \quad c = 0.0321 \mu f, \quad I_a = 7.59mA.$$

其中, u_1 和 u_2 分别是不加调制时的上、下阈值; $E_0 = \eta A$ 和 T_0 是板极上测出的调制正弦信号的峰峰值与周期; 而 E_s 、 T_s 是板极上测出的无调制锯齿振荡的峰峰值与周期。实际测得的下降时间约为上升时间的 $1/60$, 下阈值调制基本不出现。

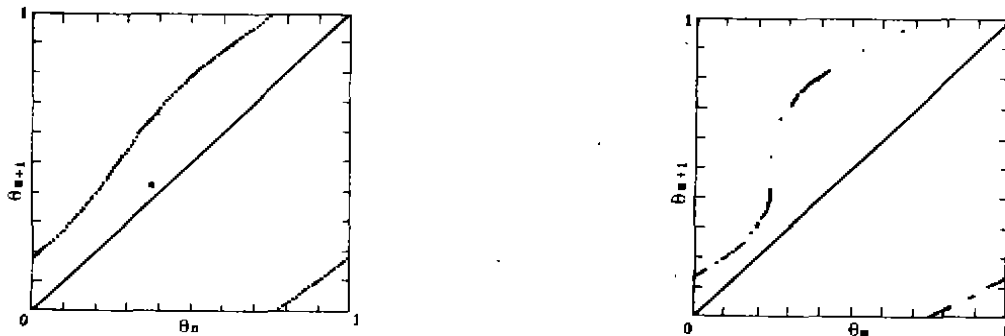


图 3 用数值方法解得的映象 (2) 的回归映象图

$$(a) \Omega = 0.232, K = 0.346; \quad (b) \Omega = 0.252, K = 1.00$$

图 3 是我们用数值方法解得的映象 (2) 的回归映象图, 在 $K < 1$ 时 (a), 映象连续、光滑, 且可逆; 而 $K = 1$ 时 (b), 映象生成一个导数为 ∞ 的“三阶奇点”, 它正是映象性质突变的临界点。若 K 再增大, 映象即不再连续, 也不再可逆。

这样的回归映象可以方便地用实验测试。将一幅时域波形图上各次振荡的幅值 V_i 相

加，则有 $V_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} u_i = V_n + \sum_{i=1}^{n+1} (u_i - u_{i-1}) = \frac{I_a t_{n+1}}{C} = \frac{I_a}{Cf} Q_{n+1}$ 。这样就可画出 $Q_{n+1}-Q_n$ 图

图 4 给出了这样得到

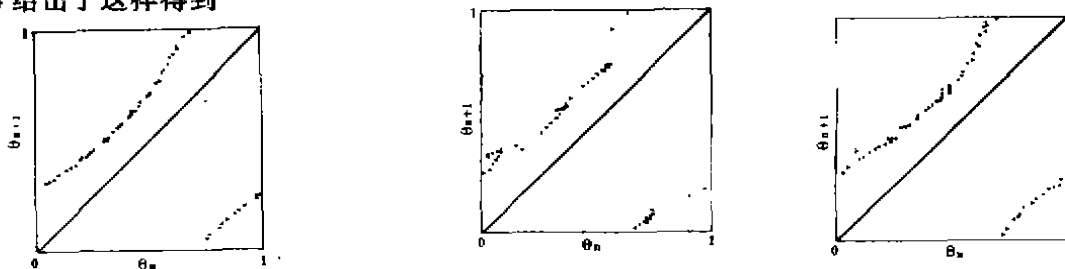


图 4 实验得到的系统回归映象图

(a) $Q=0.232, K=0.346$; (b) $Q=0.236, K=0.408$; (c) $Q=0.251, K=0.494$

的实验回归映象中的三幅。在 $Q=0.232, K=0.346$ (a) 时，实验图与相应的数值图 (图 3 (a) 相比，除了因数值计算中未考虑正弦与锯齿振荡的初相周差而有一个平移差别外，完全相同；而在 $Q=0.236, K=0.408$ 时 (b)，映象生成了“局部的”一个小“奇点”和一个小“拐点” (斜率为 0)，正相当于三阶二维圆映象在临界点的行为，而这时离理论临界线 ($K=1$) 还远。这显然是由于实际系统存在噪声的原因，由于噪声的存在可以相当于调制信号幅度的突然涨落，它足以解释这种“拐点”与“奇点”提前出现，使临界线大大降低的现象。图 4 (c) 显示了 K 继续上升到 0.494 的情况。这时映象失掉了连续性、光滑性，也不再是一维曲线，但仍可以看作原来一维曲线“起皱”、“折叠”的结果。这也与圆映象理论符合^[19~21]。

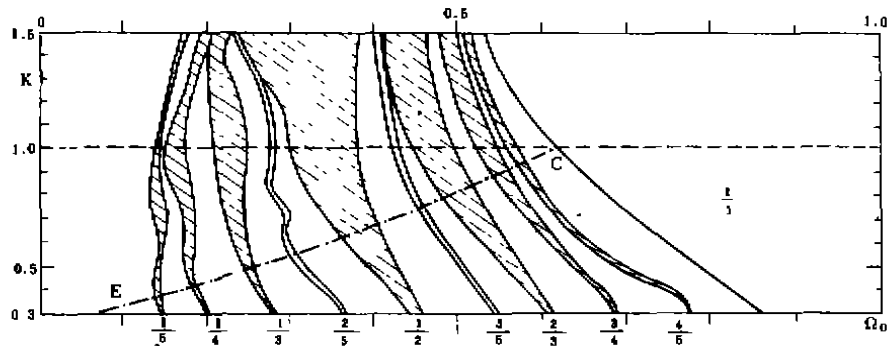


图 5 $K-Q_0$ 平面上实验测得的部分“Arnold 舌头”及实验临界线 EC

图 5 画出了 $K-Q_0$ 平面上实验测得的部分(最大的)“锁相区” (即 Arnold 舌头)，及用上述实验方法确定的临界线 EC。这里 $Q_0 = \frac{Q}{Q_{\max}}$ ，是用 1/1 锁相区右沿的 Q 最大值 Q_{\max}

将 Q 归一化的结果。沿 EC 临界线测得 103 个“锁相台阶”。我们用著名的标度公式⁽²⁾

$$N(r) \sim \left(\frac{1}{r}\right)^D \quad (4)$$

计算了台阶间“准周期空位集”的分数维 D 。这里 r 是给定的标度， $N(r)$ 是宽度大于 r 的台阶数目。测试结果显示了良好的标度规律。由最小二乘方拟合的结果是： $D=0.88 \pm 0.01$ 。同时测得沿 EC 临界线当绕数逼近黄金分割比时 Q 参数的前几级收敛比为：

$$\delta_4 = \frac{\Omega_0 1/2 - \Omega_0 2/3}{\Omega_0 2/3 - \Omega_0 3/5} = -2.63 \pm 0.1,$$

$$\delta_5 = \frac{\Omega_0 2/3 - \Omega_0 3/5}{\Omega_0 3/5 - \Omega_0 5/8} = -2.92 \pm 0.1,$$

$$\delta_6 = \frac{\Omega_0 3/5 - \Omega_0 5/8}{\Omega_0 5/8 - \Omega_0 8/13} = -2.79 \pm 0.1.$$

它们的平均值为 $\bar{\delta} = -2.83$ 这些结果与圆映象理论完全符合^[22~24, 25]。

作者感谢第三世界科学院 (TWAS) 87-24 号基金的资助, 同时感谢 Bak P, Glass 杨维明博士和裴留庆教授极有益的讨论和重要建议, 以及 Alström P 和 Jensen M H 博士及朱照宜教授所寄的非常有帮助的复印件和预印件。

参 考 文 献

- 1 Feigenbaum M J, et al. Physica 1982;5D:370
- 2 Shenker S J, Physica 1982;5D:405
- 3 Rand D, et al. Physica 1983;8D:303
- 4 Feigenbaum M J, et al. Physica 1982;5D:370
- 5 Da-Ren He, et al. Phys. Lett. A. 1989;136[7.8]:363
- 6 Jensen M H, et al. Phys. Rev. A, 1984;30: 1960. 1970
- 7 Cumming A and Linsay P S, Phys. Rev. Lett., 1987;59:1633
- 8 Da-Ren He, et al. Phys. Lett. A 1989;136[7.8]:363
- 9 Alstrom P, et al. Phys. Lett., A 1988;128[3.4]:187
- 10 Alstrom P, et al. Phys. Rev. Lett., 1988;61:1679
- 11 Glass L, et al. Lecture Notes in Biomath., 1986;66:232
- 12 Cumming A and Linsay P S, Phys. Rev. Lett., 1987;59:1633
- 13 Alstrom P. et al. Phys. Rev. Lett., 1988;61:1679
- 14 Cumming A and Linsay P S. Phys. Rev. Lett., 1987;59:1633
- 15 Glass L, et al. Lecture Notes in Biomath., 1986;66:232
- 16 Cumming A and Linsay P S. Phys. Rev. Lett., 1987;59:1633
- 17 Da-Ren He et al. Phys. Lett. A. 1989;136[7.8]:363
- 18 Da-Ren He et al. Phys. Lett. A. 1989;136[7.8]:363
- 19 Feigenbaum M J, et al. Physica. 1982;5D:370
- 20 Shenker S J, Physica. 1982;5D:405
- 21 Rand D. et al. Physica. 1983;8D:303
- 22 Feigbaum M J, et al. Physica. 1982;5D:370

- 23 Shenker S J, *Physica*.1982:5D:405
24 Rand D, et al. *Physica*.1983:8D:303
25 Jensen M H, et al. *Phys. Rev. A*,1984;30:1960:1970

Critical Behavior of Cubic Relaxation Oscillator

*He Daren, Wang Dakai, Shi Kangjie, Yang Zhenghai,
Zhao Laiyuan, Zhang Jiyue.*
(Department of Physics)

Abstract

The experimental Circuit, map description, and the experimental study on the critical behavior at the transition from quasiperiodicity to chaos for the symplectic cubic relaxation oscillator are reported. The universality of these critical behaviors is explained. The fractal dimension of the quasiperiodic set along the critical line is measured as $D = 0.88 \pm 0.01$; and the of the number convergence ratio of the map parameter when the winding number converges goldenmean is $\bar{\delta} = -2.85 \pm 0.1$. The results are in verry good agreement ith the theory of circle map. That give a good explanation to the results of $D = 0.795 \pm 0.005$ and $-3.3 \pm 0.1 < \delta_n -2.7 \pm 0.2$ obtained by Cumming et al.

Key words: Cubic relaxation oscillator; Quasiperiodicity; Chaos; Critical behavior; Fractal dimension; Winding number; Circle map.