1995 年 2 月
第 25 卷 第 1 期
西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)
Feb. 1995
Vol. 25 No. 1

(4)

11—14

随机共振问题的 PLA 方法*

张纪岳 曾贵华

(西北大学物理系,710069,西安太白北路 1 号;第一作者 58 岁,男,教授)

6 **摘 要** 在信号幅值 $\in \ll 1$ 的条件下,提出概率线性近似方法(PLAM),对周期力调制下的 Fokker Planck 方程进行了研究,获得了系统的概率密度 $P(x,t)$ 在 $\in \ll 1$ 条件下的一般表示,以此研究了随机共振问题,所得结果与实验符合得很好,并首次讨论了系统、信号和噪声间的关系。

关键词 随机共振; 概率线性近似方法; 信噪比; 功率谱 统计力学

分类号 O414.22

一个双稳系统受到周期力和随机力的调制和驱动后,在一定的噪声强度下,输出的信号获得加强,而输出噪声被削弱。对输出信噪比,在一定条件下,获得很大提高,明显优于线性系统中最佳滤波器所获得的信噪比,这种奇特的现象称为随机共振现象。对随机共振现象的研究是非平衡非线性学科中一个最近形成的方向,它源于 1981 年 Benzi R 等人对地球气候的"冰河期"和"间冰期"的周期性变迁现象的研究[1],以后引起了物理学一般意义上的兴趣和研究[2~10]。

随机共振现象是一种典型的非线性现象,它的理论还未成熟,目前,较为成功的理论是绝热近似理论。在绝热近似下,不同作者从不同角度提出了一些各具特点的理论方法,例如:文献 2 提了双态-速率方程方法(TSRE),对随机共振现象的两个著名实验(文献 6,7)进行了理论描述;文献 3 则用相位平均-微扰法(PAPT)进行了研究,根据文中得出的结果提出 SNRE 的概念;文献 4 采用微扰法-Floquet 理论(PTFT)对随机共振现象进行了较为全面的研究,反映了更多的物理内容,对 SR 和 SNRE 进行了区别。在本文中,我们提出了一种概率线性近似方法(以下简称为(PLAM),并利用 PLAM 拓宽了在 SR 研究中的调制信号范围。

1 概率密度 $P(x,t)$

1.1 $P(x,t)$的一般形式

受外加信号调制和外高斯白噪声驱动的过阻尼系统,其 Fokker-Planck 方程为:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = LP(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}(f(\in,t)P(x,t) \tag{1}$$

$$L = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x}V(x)) + D\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

式(1)中 $f(\in,t)$ 为外加调制信号,$\in$ 为幅值,D 为噪声强度,$V(x)$ 为系统的势。对双稳系统

$$V(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4 \tag{2}$$

---

* 收稿日期:1994-01-14

势垒高度 $\Delta V=V(o)-V(c)$，$V(o)$，$V(c)$分别对应 $V(x)$的极大值和极小值处势的值。

L 为 Fokker Planck 算子，其本征方程为：

$$L|n>=-\lambda_n|n> \qquad n=0,1,2\cdots \tag{3}$$

有以下特征：

1.1.1 本征值

1) $\lambda_0=0,\lambda_1=\frac{2}{\tau_k}=\frac{1}{\pi}[|V''(0)|V''(c)]^{\frac{1}{2}}\exp(-\Delta V/D)$ τ_k 为 Kramer Time。

2) 当 $D\ll\Delta V$ 时，$\lambda_1\ll\lambda_i$ $i=2,3\cdots$

1.1.2 本征矢

1) $|o>=N\exp(V(x)/D)$，$<0|=1$，

2) $|n>=N^{\frac{1}{2}}e^{\frac{V(x)}{2D}}\varphi_k(x)$，$<n|=N^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{V(x)}{2D}}\varphi_k(x)$，

3) $<m|n>=\delta_{mn}$ $m,n=0,1,2\cdots$ N 归一化常数。

1.1.3 矩阵元

1) $<m|x|n>$ $<m|\frac{\partial}{\partial x}|n>$中，因$|n>$的宇称决定了 m,n 不能同时为奇(偶)，

2) $<0|x|1>\simeq c$，

3) $<1|\frac{\partial}{\partial x}|0>=R_{10}=R_1+R_2$，$R_1=\sqrt{2\pi D/|V''(0)|}R_2$，$R_2=-c\lambda_1/D$。

在 t_0 时，给双稳系统加入信号和噪声后，$P(x,t)$是$\in$的函数，当$\in\ll1$ 时，可做线性化处理。令

$$P(x,t)=P_0(x,t)\in^0+P_1(x,t)\in^1,$$

将 $P_0(x,t)$，$P_1(x,t)$以 L 的本征矢$|n>$为基展开，得到

$$P(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(C_n^{(0)}(t)+\in C_n^1(t))|n\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(t)|n\rangle. \tag{4}$$

将式(4)代入式(1)中得到一组耦合方程

$$\begin{cases}\dot{C}_m(t)=-\lambda_mC_m(t)-\sum_n<m|\frac{\partial}{\partial x}f(\in,t)|n>C_n(t)\\ C_m(t)=C_m^{(0)}(t)+\in C_m^{(1)}(t)\end{cases} \tag{5}$$

按式(5)获得的结果将得到 PLAM 理论下的精确结果，由于求解的困难，下面做一近似处理。利用特征 1.1.1 中的 2)得到一闭合方程组

$$C_j^{(i)}(t)=e^{-\lambda_j(t-t_0)}C_j^{(i)}(t_0)-e^{-\lambda_j(t-t_0)}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}sf(s)C_m^{(i-1)}(s)e^{\lambda_j(s-t_0)}R_{ji}. \tag{6}$$

式中 $m=1-\delta_{ij}$，$k<0$ 时 $C_j^{(k)}(t)=0$，$R_{ji}=<j|\frac{\partial}{\partial x}|i>$，$i,j=1,2$，最后得到：

$$P(x,t)=C_0^{(0)}(t)|0>+C_1^{(0)}(t)|1>+\in[C_0^{(1)}(t)|0>+C_1^{(1)}(t)|1>]. \tag{7}$$

考虑到初始条件，设 $t=t_0$ 时，有 $P(x,t_0)=\delta(x-x_0)$。由此可得

$$C_n(t_0)=<n_{x_0}|, \tag{8}$$

于是有 $C_0(t_0)=1$， $C_0^{(0)}(t)=1$， $C_0^{(1)}(t_0)=0$。

从(6)，(7)两式中可知，若 $f(t)$的具体形式已知，则可求得 $P(x,t)$，于是可进一步求得有关物理量，并探讨系统的有关特征。

1.2 单色信号调制下的概率密度及特点

设 t_0 时注入系统的信号 $f(\in,t)=\in\cos(\Omega t+\theta)$则

$$C_j^{(i)}(t)=\alpha_j^{(i)}(t)e^{-\lambda_j(t-t_0)}+\beta_j^{(i)}(t) \qquad i,j=0,1. \tag{9}$$

式中 $\alpha_0^{(0)}(t)=1$， $\beta_0^{(0)}(t)=0$，

$$\alpha_0^{(1)}(t)=\frac{R_{01}C_1^{(0)}(t_0)}{(\Omega^2+\lambda_1^2)^{\frac{1}{2}}}\cos(\Omega t+\theta+\alpha), \qquad \beta_0^{(1)}(t)=-\frac{R_{01}C_1^{(0)}(t_0)}{(\Omega^2+\lambda_1^2)^{\frac{1}{2}}}\cos(\Omega t_0+\theta+\alpha),$$

$$\alpha_0^{(1)}(t)=C_1^{(0)}(t_0), \qquad \beta_1^{(0)}(t)=0,$$

$\alpha_1^{(1)}(t)=C_1^{(1)}(t_0)+\gamma_1^{(1)}(t)$,　　$\gamma_1^{(1)}(t)=\dfrac{R_{10}}{(\Omega^2+\lambda_1^2)^{\frac{1}{2}}}\cos(\Omega t+\theta-\alpha)$,

$\beta_1^{(1)}(t)=-\dfrac{R_{10}}{(\Omega^2+\lambda_1^2)^{\frac{1}{2}}}\cos(\Omega t+\theta-\alpha)$　　$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\Omega}{\lambda_1}$。

得到:

$$P(x,t)=\{[1+\in\beta_0^{(1)}(t)]|0>+\in\beta_1^{(1)}(t)|1>\}+e^{-\lambda_1(t-t_0)}\{[C_1(t_0)+\in\gamma_1^{(1)}(t)]|1>+\in\alpha_0^{(1)}(t)|0>\}$$
$$=P_\infty(x,t)+P_d(x,t)。\tag{10}$$

式中 $P_\infty(x,t)=[1+\in\beta_0^{(1)}(t)]|0>+\in\beta_1^{(1)}(t)|1>$,

$P_d(x,t)=e^{-\lambda_1(t-t_0)}\{[C_1(t_0)+\in\gamma_1^{(1)}(t)]|1>+\in\alpha_0^{(1)}(t)|0>\}$。

显然它们分别反映了系统 $P(x,t)$ 的稳态行为和瞬态行为,有如下一些特点。

1.2.1　$P_\infty(x,t)$ 随 t 做周期振荡,且频率与信号频率相同。

1.2.2　$P_d(x,t)$ 随 t 做衰减振荡,表达式中的衰减因子是理论导出的结果,避免了以前的唯象性引入。

1.2.3　由于在具体的实验中,相位 θ 是随机的,因此 $P(x,t)$ 具有相位随机性。

1.2.4　$P_\infty(x,t)$ 又可分为 $P_1(x,t)$,$P_1(x,t)$ 两部分

$$\begin{cases}P_1(x,t)=\in\beta_0^{(1)}(t)|0> \\ P_1(x,t)=|0>+\in\beta_1^{(1)}|1>。\end{cases}\tag{11}$$

显然 $P_1(x,t)$ 与初始条件有关,对输出有 $<x(t)>_{I,\infty}=0$,即无贡献。

$P_1(x,t)$ 与初始条件无关,对输出有 $<x(t)>_{1,\infty}=\in\beta_1^{(1)}(t)<0|x|1>$。

这说明系统在 long limit time 下,对输出无影响的与初态有关,而对输出有贡献的与初态无关。

2　随机共振

研究随机共振的基础是输出的相关函数 A 和功率谱 $S(\omega)$,由概率密度 $P(x,t)$ 可以得到:

$$A=\frac{\in^2c^2}{2}\frac{R_{10}^2\cos(\Omega\tau)}{\lambda_1^2+\Omega^2}+c^2\exp(-\lambda_1\tau)\Big[1-\frac{\in^2}{2}\frac{R_{10}^2}{\lambda_1^2+\Omega^2}\Big],\tag{12}$$

$$S(\omega)=\frac{\pi\in^2c^2}{2}\frac{R_{10}^2}{\lambda_1^2+\Omega^2}[\delta(\omega-\Omega)+\delta(\omega+\Omega)]+\frac{2c^2\lambda_1}{\lambda_1^2+\omega^2}\Big[1-\frac{\in^2}{2}\frac{R_{10}^2}{\lambda_1^2+\Omega^2}\Big]。\tag{13}$$

利用(3)的特征 1.1.3 中的 3)并注意到 $\sqrt{2\pi D/|V''(0)|}\ll c$ 可得 $R_{10}\approx -c\dfrac{\lambda_1}{D}$,代入(13)中可得到相关函数的极值条件

$$\lambda_1\simeq\Omega。\tag{14}$$

$\omega=\Omega$ 时,输出信噪比

$$R_{s/n}\simeq\frac{\pi c^2\in^2}{4}\frac{\lambda_1}{D^2}。\tag{15}$$

在 $D=\dfrac{1}{2}\Delta V$ 处获得 $R_{s/n}$ 的峰值。与实验结果[10]比较上述结论与实验符合得很好。

式(13)表示的功率谱可分为两部分,即信号 S_s 和噪声 S_n 部分。

$$S_s=\frac{\pi\in^2}{2}\frac{c^4\lambda_1^2}{D^2(\lambda_1^2+\Omega^2)}\delta(\omega-\Omega),\tag{16}$$

$$S_n=\frac{2c^2\lambda_1}{\lambda_1^2+\omega^2}\Big[1-\frac{\in^2}{2}\frac{c^2\lambda_1^2}{D^2(\lambda_1^2+\Omega^2)}\Big]。\tag{17}$$

这里 $c=\sqrt{a/b}$,a,b 为系统参数,因而 c 亦为系统参量。从式(17)可知:

2.1　S_s,S_n 与双稳系统的关系

当 $\omega=\Omega$ 时,a,D,$\in$ 一定的条件下,S_s 和 S_n 分别在

$$c_0=\frac{2}{\Omega}\sqrt{\frac{D}{a}}\tag{18}$$

和

$$\begin{cases} c_0 = \sqrt{8D^2 + M^2} - M \\ M = \dfrac{3D \in^2 - 2D^2 a}{a \in^2} \end{cases} \qquad (\Omega \ll \lambda_1) \tag{19}$$

处有唯一极大值。

2.2 S_1,S_n 与噪声强度间的关系

当 $\omega=\Omega$ 时,c,$\in$ 一定的条件下,S_1 和 S_n 分别在满足

$$\Delta V\Omega^2 = D(\lambda_1^2 + \Omega^2) \tag{20}$$

和 $$D = (\in^2 c^2 + \sqrt{c^4 \in^4 + 2 \in^2 c^2 \Delta V^2})/\Delta V \qquad (\Omega \ll \lambda_1) \tag{21}$$

时,有唯一极大值。

2.3 S_1,S_n 与输入信号幅值 $\in$ 的关系

在 $\omega=\Omega$ 时,c,D 一定的条件下,从式(16),(17)可知 $S_1 \propto \in^2$,S_n 随 $\in$ 增加而减少,但最近实验表明[10],在某一 D 值时,S_n 随 $\in$ 的变化中有峰值出现,这暴露了绝热近似理论的局限性。

以上讨论表明,输出的信号与噪声跟输入信号和噪声及双稳系统均有关,2.1, 2.2, 2.3 中不同条件下,S_1,S_n 出现峰值意味着信号、系统、噪声之间存在能量的转换,这正是非线性系统所独具的特性。至于其中机理,有待更进一步研究。另外,通过本文的方法,可以很好地研究其他信号调制下的随机共振现象,将另文发表。

参 考 文 献

1 Benzi R,Sutera A,Vulpiana A. The mechanism of stochastic resonance. J. Phys. A,1991,14:453～460

2 McNamara B,Wiesenfeld K. Theory of stochastic resonance. Phys. Rev. A,1989,39:4854～4869

3 Fox R. Stochastic resonance in a double well. Phys. Rev. A,1989,39:4148～4153

4 Hu G,Nicolis G,Nicolis C. Periodically forced Fokker Planck equation. Phys. Rev. A,1990,42:2030～2041

5 Zhou T,Moss F,Jung P. Escape time distributions of a periodically modulated bistable system with noise. Phys. Rev. A,1990,42:3161～3169

6 Fauve S,Heslot F. Stochastic resonance in a bistable system. Phys. Lett. A,1983,97:5～10

7 McNamara B,Wiesenfeld K,Roy R. Observation of stochastic resonance in a ring laser. Phys. Rev. Lett.,1988,60:2626～2629

8 Zhou T,Moss F. Analog simulation of stochastic resonance. Phys. Rev. A,1990,41:4255～4264

9 Hu G,Ditzinger T,Ning C Z,Haken H. Stochastic resonance without external priodic force. Phys. Rev. Lett.,1993,70:807～810

10 Hu G,Gong D C,Qing G R,et al. Comparison of analog simulation and adiabatic theory on stochastic resonance. Phys. Rev. A,1991,44:6416～6420

The PLA Method for Stochastic Resonance

Zhang Jiyue Zeng Guihua

(Department of Physics,Northwest University,710069,Xi'an)

Abstract A new method for stochastic resonance is presented. Using it the general expression of the probability density is obtained under the condition of $\varepsilon \ll 1$. The theoretical conclusion of SR is in good agreement with the experimental result. And the interactions of signal, noise and double system are disscused for the first time.

Key words stochastic resonance; linear approximation method of probability; signal to noise ratio; power spectum