随机截尾寿命试验三参数 Weibull 分布的统计分析*

师文民[1)] 杨昭军[2)]

(1)西北工业大学应用数学系,710072,西安;2)湖南税务专科学校基础部,410116,长沙;第一作者42岁,男,副教授)

A **摘 要** 利用随机截尾寿命试验获得的数据,给出了三参数 Weibull 分布参数,可靠度和失效率的 Bayes 点估计及其置信限。

关键词 随机截尾试验;三参数威布尔分布;贝叶斯估计

分类号 O212.1

寿命试验, 韦伯分布

三参数 Weibull 分布是可靠性工程中常用且重要的分布之一,因而国内外一些学者对它进行了研究[1~4],文献3在 Jeffreys 准则下,利用完全样本给出了 Weibull 分布参数和可靠度的 Bayes 点估计,文献4又将文献3推广到定数截尾的情形,并导出了参数,可靠度和失效率的 Bayes 估计。本文采用随机截尾试验模型,给出了参数、可靠度及失效率的 Bayes 点估计、区间估计及置信上下限。

1 Weibull 分布参数的 Bayes 点估计与区间估计

设三参数 Weibull 分布的分布函数为

$$F(t\,|\,m,\theta,\mu)=1-\exp\{-\frac{1}{\theta}(t-\mu)^m\}\qquad t>\mu, \tag{1}$$

其中 $m>0$ 为形状参数,$\theta>0$ 为尺度参数,$\mu\geqslant 0$ 为位置参数。设受试样本 $T_1,T_2,\cdots T_n$ 独立同分布,分布函数由(1)式给出。又设截尾时间 $\{L_i\}$ 相互独立,分布函数为 $G_i(t)$,密度函数为 $g_i(t)$,它们与参数 m,θ,μ 无关,且 $\{T_i\}$ 与 $\{L_i\}$ 也相互独立,$i=1,\cdots,n$。假定只能观测到 $X_i=T_i\wedge L_i$,$i=1,2,\cdots,n$。其中 $\wedge=\min$。若记 $\delta_i=1$(当 $T_i\leqslant L_i$ 时),$\delta_i=0$(当 $T_i>L_i$ 时),$i=1,\cdots,n$,则 $(X_1,\delta_1)\cdots(X_n,\delta_n)$ 相互独立,其联合密度为

$$L(m,\theta,\mu)=\prod_{i=1}^{n}g_i^{1-\delta_i}(x_i)\overline{G}_i^{\delta_i}(x_i)\prod_{i=1}^{n}f^{\delta_i}(x_i,m,\theta,\mu)\overline{F}^{1-\delta_i}(x_i,m,\theta,\mu),$$

其中 $\overline{G}_i=1-G_i$,$\overline{F}=1-F$,$i=1,\cdots,n$。由于截尾时间分布与 m,θ,μ 无关,故似然函数为

$$L(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta}\,|\,m,\theta,\mu)\propto\prod_{i=1}^{n}f^{\delta_i}(x_i,m,\theta,\mu)\overline{F}^{1-\delta_i}(x_i,m,\theta,\mu),$$

其中 $\underset{\sim}{x}=(x_1,\cdots,x_n)$,$\underset{\sim}{\delta}=(\delta_1,\cdots,\delta_n)$,$(x_i,\delta_i)$ 表示 r.v. (X_i,δ_i) 的取值,$i=1,2,\cdots,n$。若记 $\delta=\sum_{i=1}^{n}\delta_i$ 则

$$L(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta}\,|\,m,\theta,\mu)\propto(\frac{m}{\theta})^{\delta}(\prod_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^{\delta_i})^{m-1}\exp\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^m\}。\tag{2}$$

由文献3知可取 (m,θ,μ) 的先验分布为 $\pi(m,\theta,\mu)\propto\frac{1}{\theta m}$,从而可知 (m,θ,μ) 的后验分布为:

* 收稿日期:1995-04-11,修回日期:1995-09-05

$$H(m,\theta,\mu|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta})\propto(\frac{m}{\theta})^{\delta-1}\theta^{-2}(\prod_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^{\delta_i})^{m-1}\exp\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^m\}。\tag{3}$$

给定 $\underset{\sim}{x}$, $\underset{\sim}{\delta}$ 时, m, θ, μ 的后验边际分布分别为

$$H_1(m|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta})=A_1\Gamma(\delta)\int_0^{+\infty}m^{\delta-1}(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^m)^{-\delta}(\prod_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^{\delta_i})^{m-1}d\mu$$

$$\triangleq A_1\Gamma(\delta)\cdot B_1(m)$$

$$H_2(\theta|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta})=A_2\theta^{-(\delta+1)}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}m^{\delta-1}(\prod_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^{\delta_i})^{m-1}\exp\{-\theta^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^m\}dm\,d\mu$$

$$\triangleq A_2B_2(\theta)$$

$$H_3(\mu|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta})=A_3\Gamma(\delta)\int_0^{+\infty}m^{\delta-1}(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^m)^{-\delta}(\prod_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^{\delta_i})^{m-1}dm$$

$$\triangleq A_3\Gamma(\delta)B_3(\mu),$$

其中 $A_1^{-1}=\Gamma(\delta)\int_0^{+\infty}B_1(m)dm$, $A_2^{-1}=\int_0^{+\infty}B_2(\theta)d\theta$, $A_3^{-1}=\Gamma(\delta)\int_0^{+\infty}B_3(\mu)d\mu$, $\Gamma(\cdot)$ 为 Γ-函数。

在平方损失下 m, θ 和 μ 的 Bayes 点估计分别为

$$\hat{m}=E(m|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta})=\int_0^{+\infty}m\,H_1(m|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta})dm=A_1\Gamma(\delta)\int_0^{+\infty}mB_1(m)dm\tag{4}$$

$$\hat{\theta}=E(\theta|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta})=A_2\int_0^{+\infty}\theta B_2(\theta)d\theta\tag{5}$$

$$\hat{\mu}=E(\mu|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta})=A_3\Gamma(\delta)\int_0^{+\infty}\mu B_3(\mu)d\mu\tag{6}$$

m, θ 和 μ 的 $1-\alpha$ Bayes 置信区间 $(\underline{m},\overline{m})$、$(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 和 $(\underline{\mu},\overline{\mu})$ 分别由以下各式决定。

$$A_1\Gamma(\delta)\int_0^{\underline{m}}B_1(m)dm=A_1\Gamma(\delta)\int_{\overline{m}}^{+\infty}B_1(m)dm=\frac{\alpha}{2},\tag{7}$$

$$A_2\int_0^{\underline{\theta}}B_2(\theta)d\theta=A_2\int_{\overline{\theta}}^{+\infty}B_2(\theta)d\theta=\frac{\alpha}{2},\tag{8}$$

$$A_3\Gamma(\delta)\int_0^{\underline{\mu}}B_3(\mu)d\mu=A_3\Gamma(\delta)\int_{\overline{\mu}}^{+\infty}B_3(\mu)d\mu=\frac{\alpha}{2}。\tag{9}$$

2 可靠度及失效率的 Bayes 点估计与区间估计

三参数 Weibull 分布的可靠度函数为

$$R=R(t)=\exp\{-\frac{1}{\theta}(t-\mu)^m\}\qquad t>\mu,$$

为求 R 的后验分布,做变换

$$R=\exp\{-\frac{1}{\theta}(t-\mu)^m\},\ m=m,\ \mu=\mu。$$

设 $C(R,\mu,m)=R^{[(t-\mu)^{-m}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^m-1]}$ 经计算可得 (m,R,μ) 的后验密度为

$$\widetilde{H}(m,R,\mu|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta})\propto m^{\delta-1}(t-\mu)^{-m\delta}(-\ln R)^{\delta-1}(\prod_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^{\delta_i})^{m-1}C(R,\mu,m),$$

于是 R 的后验密度为

$$H_4(R|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta})=A_4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\widetilde{H}(m,R,\mu|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta})d\mu dm\triangleq A_4B_4(R),$$

其中 $A_4^{-1}=\int_0^1B_4(R)dR$。在平方损失下 R 的 Bayes 估计为 $\hat{R}=E(R|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta})=\int_0^1R\,H_4(R|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta})dR$,做变换 $y=-\ln R=\ln\frac{1}{R}$ 则

$$\hat{R}=A_4\Gamma(\delta)\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}m^{\delta-1}(t-\mu)^{-m\delta}[(t-\mu)^{-m}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^m+1]^{-\delta}(\prod_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^{\delta_i})^{m-1}d\mu dm,$$

可靠度 R 的 $1-\alpha$ Bayes 置信区间 $(\underline{R},\overline{R})$ 可由下式用数值积分法求得。

$$\int_0^{\underline{R}} H_4(R|\underline{x},\underline{\delta})\mathrm{d}R=\int_{\overline{R}}^1 H_4(R|\underline{x},\underline{\delta})\mathrm{d}R=\frac{\alpha}{2},\tag{11}$$

R 的 $1-\alpha$ Bayes 置信下限 $\underline{R}$ 可由下式决定

$$\int_0^{\underline{R}} H_4(R|\underline{x},\underline{\delta})\mathrm{d}R=A_4\int_0^{\underline{R}} B_4(R)\mathrm{d}R=\alpha。\tag{12}$$

类似地可求出失效率 $\lambda=\lambda(t)=\frac{m}{\theta}(t-\mu)^{m-1}$，　$t>\mu$ 的 Bayes 估计。做变换

$$\lambda=\frac{m}{\theta}(t-\mu)^{m-1},\ m=m,\ \mu=\mu,$$

则 (m,λ,μ) 的后验分布为

$$\tilde{H}_1(m,\lambda,\mu|\underline{x},\underline{\delta})\propto m^{-1}\lambda^{\delta-1}(t-\mu)^{-\delta(m-1)}\Big(\prod_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^{\delta_i}\Big)^{m-1}C_1(m,\lambda,\mu),$$

其中 $C_1(m,\lambda,\mu)=\exp\{\frac{\lambda}{m}(t-\mu)^{1-m}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^m\}$ 于是可得 λ 的后验边际分布为

$$H_5(\lambda|\underline{x},\underline{\delta})=A_5\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} m^{-1}\lambda^{\delta-1}(t-\mu)^{-\delta(m-1)}\Big(\prod_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^{\delta_i}\Big)^{m-1}C_1(m,\lambda,\mu)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}m$$
$$\triangleq A_5B_5(\lambda),$$

其中 $A_5^{-1}=\int_0^{+\infty} B_5(\lambda)\mathrm{d}\lambda$。而 λ 的 Bayes 估计为

$$\hat{\lambda}=E(\lambda|\underline{x},\underline{\delta})=A_5\int_0^{+\infty}\lambda B_5(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$
$$=A_5\Gamma(\delta+1)\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} m^{\delta-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^m\Big)^{\delta}\Big(\prod_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^{\delta_i}\Big)^{m-1}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}m,\tag{13}$$

λ 的 $1-\alpha$ Bayes 置信区间 $(\underline{\lambda},\overline{\lambda})$ 由下式确定，

$$\int_0^{\underline{\lambda}} H_5(\lambda|\underline{x},\underline{\delta})\mathrm{d}\lambda=\int_{\overline{\lambda}}^{+\infty} H_5(\lambda|\underline{x},\underline{\delta})\mathrm{d}\lambda=\frac{\alpha}{2},\tag{14}$$

λ 的 $1-\alpha$ Bayes 置信上限 $\overline{\lambda}$ 可由下式确定，

$$\int_{\overline{\lambda}}^{+\infty} H_5(\lambda|\underline{x},\underline{\delta})\mathrm{d}\lambda=\alpha。\tag{15}$$

采用数值积分的方法[5]，由(4)～(15)式可求出分布参数、可靠度和失效率的 Bayes 点估计和区间估计，进而求出 Bayes 置信上下限。由于(4)～(15)各式的计算问题，可化为两个二重积分之比的形式，从而可利用文献5中给出的近似计算公式，其计算方法为，若两个积分中的被积函数可分别化为 $e^{L^*(\beta)}$ 与 $e^{L(\beta)}$ 的形式，$\beta=(\beta_1,\beta_2)$，且 $L^*(\beta)$ 与 $L(\beta)$ 具有二阶混合偏导数，则有近似公式：

$$\int_\Omega e^{L^*(\beta)}\mathrm{d}\beta\Big/\int_\Omega e^{L(\beta)}\mathrm{d}\beta\triangleq E_n\doteq\Big(\frac{\det\sum^*}{\det\sum}\Big)^{\frac{1}{2}}\exp\{L^*(\hat{\beta}^*)-L(\hat{\beta})\},\tag{16}$$

其中 Ω 为 β 的积分域，$\hat{\beta}^*$ 与 $\hat{\beta}$ 分别为 $L^*(\beta)$ 及 $L(\beta)$ 的最大值点。$\det\sum^*=[\frac{-1}{A}]_{\hat{\beta}^*}$　$\det=[\frac{-1}{B}]_{\hat{\beta}}$。

$$A=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2L^*(\beta)}{\partial\beta_1^2} & \frac{\partial^2L^*(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_2}\\ \frac{\partial^2L^*(\beta)}{\partial\beta^2\partial\beta_1} & \frac{\partial^2L^*(\beta)}{\partial\beta_2^2}\end{vmatrix}\qquad B=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2L(\beta)}{\partial\beta_1^2} & \frac{\partial^2L(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_2}\\ \frac{\partial^2L(\beta)}{\partial\beta^2\partial\beta_1} & \frac{\partial^2L(\beta)}{\partial\beta_2^2}\end{vmatrix}$$

其中 $[b]_c$ 表示 b 在 C 点取值。

对于(16)式，文献5证明了

$$E_n=\hat{E}_n(1+0(n^{-2})),$$

式中　$$\hat{E}_n=(\det\sum^*/\det\sum)^{\frac{1}{2}}\exp\{L^*(\hat{\beta}^*)-L(\hat{\beta})\}。$$

从而看出 n 越大近似程度越好。由于(4)～(15)式给出的积分表达式满足(16)式所需的条件，故可由近似计算公式求出分布参数、可靠度和失效率的 Bayes 点估计与区间估计，进而求出 $R(t)$ 与 $\lambda(t)$ 的

Bayes 置信上下限。

参 考 文 献

1 Adatia A, Chan L K. Robust estimators of the 3-parameter Weibull distribution. IEEE Trans. on R., 1985, 34(4):347~351

2 Carn G W. Moment estimators for the 3-parameter Weibull distribution. IEEE Trans. on R., 1988, 37(4):360~363

3 Sinha S K Slon J A. Bayes estimators of the parameters and reliability function of the 3-parameters Weibull distribution. IEEE Trans. on R., 1988, 37(4):364~369

4 师义民. 定数截尾寿命试验三参数威布分布的Bayes统计分析. 工程数学学报, 1992, 19(3):98~104

5 Tierney L, Kadane J B. Accurate approximation for posterior monents and marginal denstities. JASA, 1986, 81(393):82~86

6 曹晋华, 程侃. 可靠性数学引论. 北京:科学出版社, 1986

责任编辑 张素敏

Statistical Analysis of the 3-Parameter Weibull Distribution in Random Censoring Life Test

Shi Yimin[1)] Yang Zhaojun[2)]

(1)Northwestern Polytechnical University, 710072, Xi'an; 2)Hu'nan Taxation College, 410116, Changsha)

Abstract A Bayes analysis method, the Bayes point and interval estimators for the parameters of 3-parameter Weibull distribution are obtained. The Bayes point estimators, Bayes confidence bounds of reliability and failure rate are also given.

Key words random censoring life test; 3-parameter Weibull distribution; Bayes estimators

·学术动态·

防止轨道车辆车轴裂纹和切轴的进展

轨道车辆车轴裂纹和切轴时有发生，直接危及行车安全。对此类机件分析，裂纹和切轴都产生于台阶圆角处，且断面形态均为由2～3个呈同心圆的疲劳扩展区和中心静断区组成，发生原因主要有：

(1)台阶圆角半径小于图纸尺寸要求；

(2)表面加工粗糙，一般只达到▽3.2，个别甚至为▽6.3；

(3)车轴在装配时有擦伤，咬蚀，表层具有残余拉应力。

根据实践经验通过优选切削参数，合理选择刀具几何形状，即可解决以上前两个问题。针对第三个原因，我们认为在车削后，增加滚压强化工序，收效较好。滚压可使被加工表面均匀地产生塑性变形，把车加工遗留下来的微观波峰压低，填补波谷，除进一步降低表面粗糙度外，其主要作用是由于表层塑性变形晶格发生畸变，歪曲，晶粒破碎，阻碍晶粒的滑移，提高了表层硬度，经测试硬度可由HRC24升至HRC32，并产生表层残余压应力。而残余压应力在车轴受载时，与载荷应力迭加，减少了拉应力值。在受交变应力作用时，降低平均应力值，从而提高了车轴的静强度和疲劳强度。

对车轴采取滚压强化工序后，经实际观察，再未发生过裂纹和切轴现象。同样对大修的车轴，因其已经过交变应力反复作用，其表层残余压应力已削减，也可通过滚压强化方法，提高其疲劳强度，以延长使用期限，确保行车安全。

(刘孟冬)