同态关系的关系矩阵*

杨留记

(西北大学计算机科学系,710069,西安;59岁,男,教授)

A **摘　要**　定义了关系矩阵的满同态简化和最简关系矩阵的概念。讨论了满同态关联的各关系的关系矩阵的性质。得到了关系满同态的充要条件和判定关系等价性的充要条件。

关键词　关系;关系矩阵;同态;等价关系　关系矩阵,同态关系,满同态,

分类号　O158

文献1对关系同构时关系矩阵的性质进行了讨论。文献2讨论了同态关系的性质。在这两文的基础上,本文对同态关系的关系矩阵之间的联系进行了深入的讨论,最后证明了等价关系的关系矩阵均能满同态简化成单位矩阵。

首先约定:以下讨论中的集合都是有穷集合。

1　关系矩阵的满同态简化和最简关系矩阵的概念

定义1　设 R 是从 X 到 Y 的关系,M_R 是 R 的关系矩阵;若 M_R 中有两行(列)记入值完全相同,则可删去其中任一行(列),得到一个新关系矩阵 M'_R,称 M'_R 是 M_R 的一次满同态简化。对 M'_R 的一次满同态简化所得到的关系矩阵,称为 M_R 的二次满同态简化。对 M_R 的 $n-1$ 次满同态简化所得到的关系矩阵再进行一次满同态简化,所得到的关系矩阵,称为 M_R 的 n 次满同态简化。

定义2　设 R 是 X 上的关系,M_R 是 R 的关系矩阵;若 M_R 的第 i 行和第 j 行记入值均对应相等,而且第 i 列和第 j 列的记入值也均对应相等,则可删去第 j(或 i)行和第 j(或 i)列,得到关系矩阵 M'_R,称 M'_R 是 M_R 的一次满同态简化。对 M'_R 的一次满同态简化称为 M_R 的二次满同态简化。对 M_R 的 $n-1$ 次满同态简化再进行一次满同态简化所得结果,称为 M_R 的 n 次满同态简化。

定义3　设 M_R 是从 X 到 Y(或 X 上)的关系 R 的关系矩阵,若 M_R 不可能再进行满同态简化,则称 M_R 是最简关系矩阵。具有最简关系矩阵的任一关系都称为最简关系。

2　满同态关联的各关系之关系矩阵的性质

下面证明的从 X 到 Y 的关系的定理,对于 X 上的关系也都成立,证明方法也相同。以后用到时将直接引用,不再说明。

定理1　设从 X 到 Y 的关系 R 的关系矩阵为 M_R,M_R 经一次满同态简化后得到 M'_R,则存在一个结构 $<X_1,Y_1,R_1>$,使得 R_1 的关系矩阵为 M'_R,且存在从 $<X,Y,R>$ 到 $<X_1,Y_1,R_1>$ 的满同态 f。

证明　不妨设 x_i 和 x_j 在 M_R 中对应的行记入值相同,且对 M_R 进行满同态简化时所删去的是元素 x_j 对应的行。令 $X_1=X-\{x_j\}$,$Y_1=Y$,$R_1=(X_1\cup Y_1)\times(X_1\cup Y_1)\cap R$,显然可有 R_1 的关系矩阵 $M_{R_1}=M'_R$[1]。

从 $X\cup Y$ 到 $X_1\cup Y_1$ 的函数 f 定义为:

* 收稿日期:1995-08-30

$$\forall\ x\in X \text{ 且 } x\neq x_j,\quad f(x)=x,$$
$$f(x_j)=x_i,$$
$$\forall\ y\in Y \qquad f(y)=y。$$

显然,f 是从 R 到 R_1 的满同态。

定理2 设从 X 到 Y 的关系 R 的关系矩阵是 M_R,M'_R 是 M_R 的 n 次满同态简化;则存在结构 $<X',Y',R'>$,使得 M'_R 是 R' 的关系矩阵;且存在从 $<X,Y,R>$ 到 $<X',Y',R'>$ 的满同态 f。

证明 由定理1及文献2中合成满同态的性质立即可得。

显然,任一关系矩阵 M_R,若 M_R 不是最简关系矩阵,必然都能满同态简化,得到最简关系矩阵。

定理3 若从 X 到 Y 的关系 R 的关系矩阵为 M_R,M_{R_1} 和 M_{R_2} 都是 M_R 的满同态简化,且 M_{R_1} 和 M_{R_2} 都是最简关系矩阵,则 R_1 和 R_2 同构。

证明 考虑 M_R 满同态简化为 M_{R_1} 和 M_{R_2} 的过程。若在 M_R 中与第一行记入值完全相同的行有 k 个,在满同态简化得到的最简关系矩阵中,必须且只能留下一行。设在 M_R 满同态简化为 M_{R_1} 后,留下的行为 i,在 M_R 满同态简化为 M_{R_2} 后,留下的行为 j。则这两行的记入值是完全相同的。对 M_R 中与讨论过的行记入值不同的行,进行同样的讨论,直到所有的行都讨论过为止。显然可以得到下面的结果:对 M_{R_1} 中任一行,在 M_{R_2} 中必有且只有一行的记入值与它是完全相同的;反之,对 M_{R_2} 中任一行,在 M_{R_1} 中必有且只有一行的记入值与它是完全相同的。上述讨论的结果,对列也显然成立。由此可知,将 M_{R_2} 中与 M_{R_1} 中记入值相同的行和列,用文献1中的交换变换,变换到与 M_{R_1} 中对应行和列相同的位置。最后,M_{R_2} 变为 M'_{R_2}。于是 $M'_{R_2}=M_{R_1}$,由文献1的定理1知,R_1 同构于 R_2。

定理4 设关系 R 和 R_1 的关系矩阵分别为 M_R 和 M_{R_1},R 满同态于 R_1 的充要条件是 M_R 可满同态简化为 M_{R_1}。

证明 设 M_R 满同态简化为 M_{R_1},则由定理2知,R 满同态于 R_1。

反之,设 f 是从结构 $<X,Y,R>$ 到结构 $<X_1,Y_1,R_1>$ 的满同态。根据满同态的定义知,$\forall\ x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$,且 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=x'\in X_1$,则在 M_R 中,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 对应的行的记入值都是相同的。于是,删去 M_R 中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 对应的 n 个行中的 $n-1$ 个行,仅留下其中一行。显然,这是对 M_R 的满同态简化。$\forall\ y_1,y_2,\cdots,y_m\in Y$,且 $f(y_1)=f(y_2)=\cdots=f(y_m)=y'\in Y_1$,则留下这 m 个列中的任一列,删去其余 $m-1$ 列。按上述方法继续对 M_R 中剩下的行和列进行删除操作,直到再不能删除为止,设最后得到的关系矩阵为 M_{R_2}。由定理2知,有结构 $<X_2,Y_2,R_2>$,使得 M_{R_2} 是 R_2 的关系矩阵;R 满同态于 R_2。

下面证明 R_2 同构于 R_1。为此,定义从 $X_2\cup Y_2$ 到 $X_1\cup Y_1$ 的函数 g 如下:

$$g(x_i)=x',\forall\ \ x_i\in X_2 \text{ 且 } f(x_i)=x'\in X_1,$$
$$g(y_j)=y',\ \forall\ \ y_j\in Y_2 \text{ 且 } f(y_j)=y'\in Y_1,$$

显然 g 是函数。下面证明 g 是从 $<X_2,Y_2,R_2>$ 到 $<X_1,Y_1,R_1>$ 的同构。

(1) 由于 f 是满射函数,根据 g 的定义知,g 也是满射函数。

(2) $\forall\ \ x_1,x_2\in X_2$,且 $x_1\neq x_2$,则必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$。因为在对 M_R 满同态简化时,函数值相同的行仅留下一行,故 $g(x_1)=f(x_1)\neq f(x_2)=g(x_2)$。同理,$\forall\ y_1,y_2\in Y_2$ 且 $y_1\neq y_2$,必有 $g(y_1)\neq g(y_2)$。g 是单射函数。

(3) $\forall\ \ x_i\in X_2,\forall\ \ y_j\in Y_2,<x_i,\ y_j>\in R_2$ 当且仅当 $<g(x_i),\ g(y_j)>=<f(x_i),\ f(y_j)>\in R_1$。

由(1)、(2)、(3)知 g 是同构。根据文献1知,M_{R_2} 经交换变换可变换为 M_{R_1},故 M_R 可满同态简化为 M_{R_1}。

定理5 若关系 R_1 可满同态于关系 R_2,R_2 可满同态于关系 R_3,且 R_1 有最简关系矩阵,则 R_3 满同态于 R_1。

证明 由文献2知 R_1 可满同态于 R_2,必有 R_1 满同态于 R_2 或 R_2 满同态于 R_1。由于 R_1 有最简关系矩阵,故必有 R_2 满同态于 R_1。由条件 R_2 可满同态于 R_3 证明 R_3 满同态于 R_1。分两种情况来讨论:

(1) 若 R_3 满同态于 R_2,则由满同态的合成仍为满同态可知,R_3 满同态于 R_1。

(2) 若 R_2 满同态于 R_1，(a)若 M_{R_3} 可满同态简化为 $M_{R'_3}$，且 R'_3 有最简关系矩阵，则 R_3 满同态于 R'_3；由(1)知 R_2 满同态于 R'_3。由定理3知，R_1 同构于 R'_3，由此可知，R_3 满同态于 R_1。(b)若 M_{R_3} 是最简关系矩阵，由定理3，R_3 满同态于 R_1。

定理6　设关系 R_1 满同态关联于 R_n，R_1 有最简关系矩阵，则 R_n 满同态于 R_1。

证明　由文献2中满同态关联的定义知，R_1 满同态关联于 R_n，必存在关系 $R_2, R_3, \cdots, R_{n-1}$，使得 R_i 可满同态于 R_{i-1} $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$。已知 R_1 有最简关系矩阵，由定理5知 R_2 满同态于 R_1。同理，R_3 满同态于 R_1，…，R_n 满同态于 R_1。

定理7　设关系 R_1 和 R_2 都有最简关系矩阵，R_1 同构于 R_2 的充要条件是 R_1 和 R_2 有满同态关联。

证明　若 R_1 同构于 R_2，显然，R_1 和 R_2 有满同态关联。反之，设 R_1 和 R_2 有满同态关联，R_1 和 R_2 都有最简关系矩阵，由定理6和定理3知，R_1 同构于 R_2。

定理8　设 $X=\{R|R$ 是关系$\}$，$S=\{<R_i, R_j>|\forall\ R_i, R_j \in X$ 且 R_i 和 R_j 满同态关联$\}$，则 S 是等价关系。

证明从略。下面讨论 X 上的等价关系的满同态简化。

定理9　X 上关系 R 是等价关系的充要条件是 M_R 可满同态简化成单位矩阵。

证明　若 M_R 可满同态简化成单位矩阵，由定理4知，R 满同态于一个单位矩阵。由文献2的定理1知，R 是等价关系。

反之，设 R 是等价关系，若 xRy，在 M_R 中与元素 x 和 y 对应的行和列中各记入值必完全相同。将 y (或 x)对应的行和列划掉；这是对 M_R 的一次满同态简化。将与 x 等价的各元素对应的行和列全划掉后，仅剩下 x 所对应的行和列。与 x 不等价的各元素对应的行和列均未被划去。x 所对应的行和列中各记入值，此时仅在交叉处为“1”，其余均为“0”。继续进行满同态简化，直到得到最简关系矩阵 M'_R 为止。显然，M'_R 是单位矩阵。这个定理给出了一个用关系矩阵判定关系等价性的简单方法。

3　结束语

关系的满同态，实际上是对具有一定联系的关系之共性的研究。本文定理8表明，满同态关联是对关系进行的一种分类，同一类中的关系可视为等价。对有穷集合间的关系，就是按最简关系进行分类。虽然本文中讨论的关系是有穷集合，实际上，在满同态关联的各关系中，只要有一个是有穷集合，其余关系可以是无穷集合；此时，就可以利用满同态简化、最简关系矩阵等，对此有穷集合的性质进行研究，从而也得到其他关系的性质。这显然是把无穷集合上的某些关系性质的研究，转化为有穷集合上的关系来讨论的一种方法。

参　考　文　献

1　杨留记. 关系矩阵的变换及其应用 · 离散数学及其应用论文集. 北京：北京大学出版社，1994. 98～102

2　杨留记. 关系的同态及应用. 西北大学学报(自然科学版)，1995, 25(增刊)：134～134

3　许华康，杨留记. 离散数学. 西安：西北大学出版社，1994. 128～150

责任编辑　张素敏

Relation Matrices of Homomorphic Relations

Yang Liuji

(Department of Computer Science, Northwest University, 710069, Xi'an)

Abstract　epimorpnic reduction and simple relation matrix are defined. properties of relation matrices of epimorpnic connective relations are discussed. A necessary and sufficient condition for epimorpnism between relations is proved and a necessary and sufficient condition for equivalence relation is given.

Key words　relation; homomorphism; relation matrix; equivalence