

# 高粘度流体在波纹板通道内的流动模型

师晋生

(天津科技大学机械工程学院, 天津 300222)

**摘要:** 对高粘度流体在波纹板通道内的流动进行了分析, 对控制微分方程及边界条件作无量纲处理, 引入流函数, 采用摄动展开建立了近似分析模型, 得到了流函数、速度及压力沿轴向变化的解析表达式, 讨论了壁面波纹的波幅及波长对流动的影响, 并根据比拟理论分析了波纹通道对传热的影响。

**关键词:** 高粘度; 波纹壁面; 流动; 摄动展开; 模拟

**中图分类号:** TK121      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1009-606X(2006)06-0884-05

## 1 前言

换热器是动力、化工、石油、能源、食品及制药等行业的重要通用设备。在现代化学工业中, 各种换热器的投资大约占设备总投资的 30%~40%。由于换热设备量大面广, 其传热过程的优劣对能源的有效利用关系极大, 因而促进强化传热的研究一直倍受关注。而强化传热元件的研究是新型高效换热设备设计制造的基础<sup>[1,2]</sup>。在强化传热的研究中, 各种机械加工或化学处理的传热表面得到了广泛应用, 波纹壁面就是其中的一种, 它已在紧凑式换热器、液膜式蒸发器、电子元器件的冷却中得到应用<sup>[3-5]</sup>。流体在波纹通道的流动中, 由于波纹板周期性波峰与波谷的存在, 使板内流体扰动明显增大, 从而促进流体的传热传质。因为流动的增强是传热传质得以强化的前提, 因此, 要了解波纹板强化传热的特性, 首先就要了解流体在波纹板内的流动。目前, 有关这一问题的理论研究还很少。

文献[6]用有限元方法对烟气在波纹板通道内的湍流流动与传热进行了计算, 文献[7]对波纹管空气在紊流状态下的流阻与传热特性进行了实验研究, 文献[8]对波纹板通道内层流状态的水的流动进行了数值模拟。这些研究都说明波纹式通道会增大流动阻力, 可强化传热, 但均未能以显性形式直观地揭示波纹表面波幅和波长对流动或传热的影响规律。本工作对此类问题的一种特殊情况即高粘度流动进行分析, 求出了分析解, 对增进这类问题研究的完整性具有重要意义。

波纹板的形状多种多样, 如三角形、半圆形、梯形、人字形等<sup>[9]</sup>, 为处理问题方便, 本研究以小振幅正弦型波纹板通道内的高粘度流体在稳定区段的流动过程为对象, 采用摄动展开法, 将流体的流动特性与波纹壁面的结构关联起来, 建立简化分析模型, 得到了流动问题

的分析解, 对此情况下的传热应用比拟方法提出了一个简化表达式。

## 2 波纹通道层流模型

高粘度流体在压差作用下在水平放置的 2 块波纹板间流动, 2 块平行板呈正弦形, 研究对象及坐标系如图 1 所示。假定研究对象距入口足够远, 此时, 入口影响可忽略不计, 流体的流速及压差只随壁面的扰动作周期性变化。

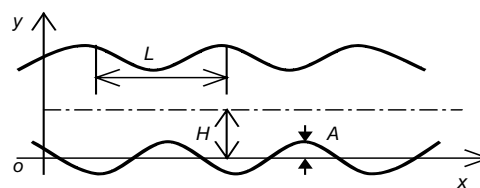


图1 波纹板通道  
Fig.1 Wavy plate duct

假定流体为牛顿型常物性高粘度介质, 因而雷诺数很小, 处于层流区域; 壁面正弦形波纹的周期长为  $L$ , 波幅为  $A$ , 通道平均高度为  $2H$ , 波幅与流道高度相比为一小量。

### 2.1 流动基本方程

用  $\rho, \mu, \nu$  和  $g$  表示流体的密度、动力粘度、运动粘度和重力加速度, 用  $u, v$  表示在  $x$  和  $y$  方向的速度,  $p$  表示压力, 则流动的基本方程为直角坐标系的二维 Navier-Stokes 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (3)$$

### 2.2 流动边界条件

波纹壁面的形状表示为  $y=A\sin(2\pi x/L)$ . 按无滑移条件, 流体在壁面上的流速为 0, 在流道中心线, 速度达最大, 故有

$$y = A\sin(2\pi x/L), \quad u = v = 0, \quad (4)$$

$$y = H, \quad \partial u/\partial y = 0. \quad (5)$$

### 2.3 近似模型

设波纹板单位宽度即垂直于  $x, y$  平面方向上的流体体积流量为  $2\Gamma$ . 以  $H$  为特征长度、 $\Gamma/H$  为特征速度、 $\mu\Gamma/H^2$  为特征压力, 将各量无量纲化, 代入式(1)~(5). 令  $\lambda=2\pi H/L, Re=\Gamma/\nu, \varepsilon=A/H, Re, \varepsilon$  均为小量. 引入无量纲流函数  $\psi$ , 代入动量方程, 将  $x$  方向的动量方程对  $y$  求导,  $y$  方向的动量方程对  $x$  求导, 二式相减消去重力和压力项. 以  $\varepsilon$  即波纹板的无量纲波幅为摄动参量, 将流函数和压力展开成  $\varepsilon$  的幂级数, 用 0, 1, 2 作下标表示零级、一级和二级近似情况下的变量, 即

$$\psi(x, y) = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \dots, \quad (6)$$

$$p(x, y) = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots, \quad (7)$$

此处  $\psi$  和  $p$  均为无量纲形式. 将 2 个边界条件也按这种方式分别展开到波纹板波纹的中间和通道的中间位置, 即  $y=0$  及  $y=1$  处, 可得关于摄动参量的零级与一级近似方程, 用  $x$  和  $y$  作下标表示对相应变量求导, 得

$$\text{零级} \quad \nabla^4 \psi_0 = 0, \quad (8)$$

$$y = 0, \quad \psi_0 = 0, \quad \psi_{0y} = 0,$$

$$y = 1, \quad \psi_0 = 1, \quad \psi_{0yy} = 0.$$

$$\text{一级} \quad k(\psi_{0y}\nabla^2\psi_{0x} - \psi_{0x}\nabla^2\psi_{0y}) = \nabla^4\psi_1, \quad (9)$$

$$y = 0, \quad \psi_1 + \sin(\lambda x)\psi_{0y} = 0, \quad \psi_{1y} + \sin(\lambda x)\psi_{0yy} = 0,$$

$$y = 1, \quad \psi_1 = 0, \quad \psi_{1yy} = 0.$$

式(9)中, 已令  $Re=k\varepsilon, k$  是量级为 1 的参数. 由  $x$  方向的动量方程, 有

$$p_x = \psi_{y,xx} + \psi_{y,yy} + Re(\psi_x\psi_{y,y} - \psi_y\psi_{x,x}),$$

$$\text{得} \quad p_{0x} = \psi_{0yxx} + \psi_{0yyy}, \quad (10)$$

$$p_{1x} = \psi_{1yxx} + \psi_{1yyy}. \quad (11)$$

零级方程描述的是平板通道壁面上的流动情况, 一级方程则反映了略去高阶小量的情况下, 波纹扰动对流动的影响. 对许多工程中的实际问题, 只取一级近似就可很好地反映问题的本质了.

## 3 模型的求解

### 3.1 零级方程

方程(8)及其边界条件反映壁面没有波纹摄动时的情况, 此时流速沿流向没有变化, 因而动量方程成为  $y$  方向的常微分方程, 求解可得

$$\psi_0 = \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{2}y^3. \quad (12)$$

### 3.2 一级方程

一级近似方程反映壁面存在波纹时对流体扰动的基本影响. 根据问题的特点, 将其表示为分离变量的形式, 以复函数形式表示流函数, 令

$$\psi_1 = F(y)e^{i\lambda x}, \quad (13)$$

式中,  $i$  为虚数单位. 将式(13)及零级方程的解代入式(9)及其边界条件, 得

$$F'''' - 2\lambda^2 F'' + \lambda^4 F = 0, \quad (14)$$

$$y = 0, \quad F = 0, \quad F' = -3i,$$

$$y = 1, \quad F = 0, \quad F'' = 0.$$

求解, 得

$$F = 6i \frac{\text{sh}(\lambda y) - y\text{sh}\lambda\text{ch}[\lambda(1-y)]}{\text{sh}(2\lambda) - 2\lambda}. \quad (15)$$

由此得到一级流函数后, 即可了解波纹壁面对流体流动的影响. 略去高阶项, 可得

$$\psi \approx \psi_0 + \varepsilon\psi_1, \quad (16)$$

$$p_x \approx p_{0x} + \varepsilon p_{1x} = -3 - \frac{12\varepsilon\lambda^2\text{sh}\lambda\text{ch}[\lambda(1-y)]}{\text{sh}(2\lambda) - 2\lambda} ie^{i\lambda x} = \quad (17)$$

$$A_p \sin(\lambda x + \phi),$$

$$u = 3y - \frac{3}{2}y^2 +$$

$$6\varepsilon \frac{\lambda\text{ch}(\lambda y) - \text{sh}\lambda\text{ch}[\lambda(1-y)] + \lambda y\text{sh}\lambda\text{sh}[\lambda(1-y)]}{\text{sh}(2\lambda) - 2\lambda} ie^{i\lambda x}, \quad (18)$$

$$v = 6\varepsilon\lambda \frac{\text{sh}(\lambda y) - y\text{sh}\lambda\text{ch}[\lambda(1-y)]}{\text{sh}(2\lambda) - 2\lambda} e^{i\lambda x}. \quad (19)$$

### 3.3 传热的比拟

在很多情况下, 按照比拟理论, 热量传递与动量传递之间有一定的类比关系, 用斯坦顿数  $St$ 、普朗特数  $Pr$  及摩擦阻力系数  $C$  来表示, 可写为  $StPr^{2/3}=C/2$ <sup>[10]</sup>, 该式对层流与紊流都适用,  $10^{-2}<Pr<10^3$ . 因此, 采用这

种方法, 只需知道波纹壁面相对于光滑壁面的阻力特点就可粗略了解二者传热特性的相对走向. 分别用  $w, s$  作下标表示波纹壁面和平直壁面, 有

$$\frac{Nu_w}{Nu_s} = \frac{C_w}{C_s} = \frac{(\partial u / \partial y + \partial v / \partial x)|_{y=0}}{\partial u_0 / \partial y|_{y=0}} = 1 + 4\varepsilon \left[ \frac{\lambda(\text{sh}\lambda)^2}{\text{sh}(2\lambda) - 2\lambda} \right] i e^{i\lambda x}. \quad (20)$$

### 4 结果与讨论

根据以上结果, 可以考察波纹板通道内高粘度流体或低雷诺数情况下的流动特性. 图 2~7 分别绘出了  $\varepsilon$  和  $\lambda$  的变化对波纹板通道内流函数、速度、压力的影响, 图 8 反映了波纹板通道内高粘度流体传热特性随  $\varepsilon$  和  $\lambda$  的相应变化.

流函数沿  $x$  方向的变化反映了流体量的变化, 这种变化引起流体的波动. 由图 2, 3 可以看出, 流体的波动在  $x$  方向呈周期性变化, 流体波动的幅度随  $\varepsilon$  增大而增大, 频率随  $\lambda$  增大而提高. 这是因为随着  $\varepsilon$  和  $\lambda$  的增大, 壁面波纹增高, 密度加大, 对流体的扰动增强. 沿  $y$  方向不同位置处的波动也不同, 从波纹壁面向通道中心,

流体的波动先因壁面的阻挡而较小, 之后变大, 接近中心线波动又变小, 达到中心线波动趋于停止.

由式(18)和(19)可知, 速度分量  $u$  和  $v$  都沿  $x$  方向作周期性波动. 图 4, 5 示出了壁面波峰处  $u$  和  $v$  的变化, 在  $x$  轴的其他位置处, 情况与之类似, 只是波动的幅度和方向有所不同. 在波谷处, 速度波动的方向相反. 图 4, 5 显示,  $\varepsilon=0$  即壁面为光滑平直形状时,  $v=0, u$  的扰动部分为 0, 在  $y$  方向的分布呈抛物线型,  $u$  在  $y=0$  处为 0, 随  $y$  增大而增大, 至  $y=1$  时最大. 随  $\varepsilon$  增大,  $u$  的值在  $y=0$  处逐渐增大, 至  $y=1$  逐渐减小;  $v$  在  $y=0$  和  $y=1$  处都为 0, 在靠近壁面一侧的位置达到最大,  $v$  的扰动随  $\varepsilon$  增大而增大; 当  $\lambda$  增大时,  $u$  的扰动略有增大,  $v$  的扰动增大较多.

流体扰动自然引起压力的变化, 这种变化包括压力幅值与相位角的变化. 流体在水平放置的通道内的流动是依靠压力降进行的, 在平行平直通道内此压降梯度可保持不变, 在波纹形通道内则不然. 此时压力变化的幅值与相位角在  $x$  方向仍然是周期性的, 由式(17)可知, 压力的相频率与波纹壁面相等, 但有 1 个相位角的差别. 由图 6 可知, 压力变化的幅度随  $\varepsilon$  和  $\lambda$  的增大而增大, 即

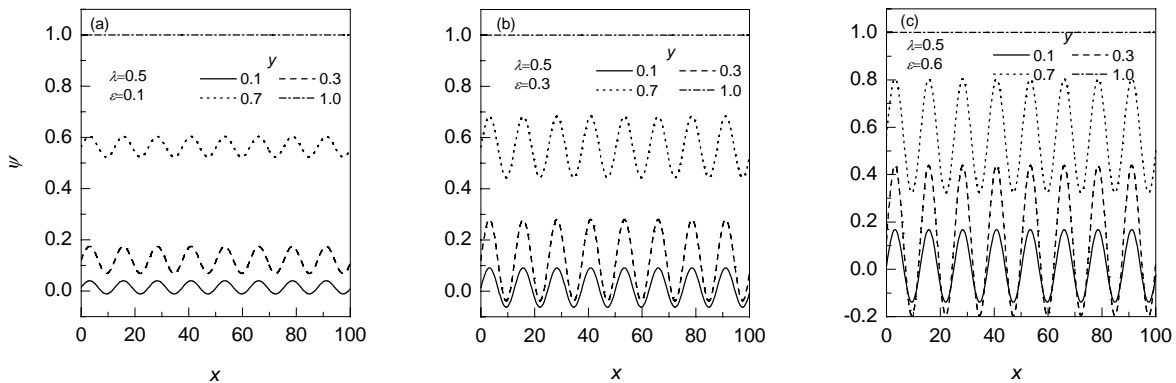


图 2 壁面波幅对流动的影响  
Fig.2 Effect of amplitude of the solid surface on flow state

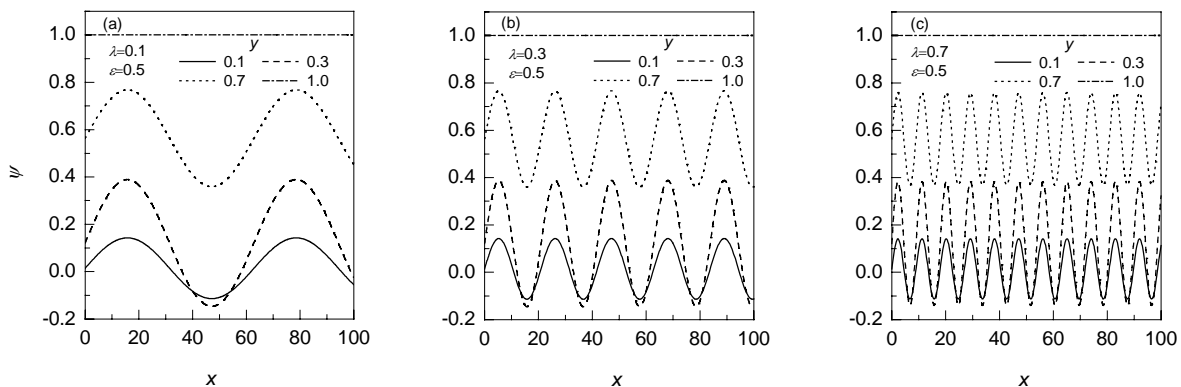


图 3 波纹频率对流动的影响  
Fig.3 Effect of wave frequency of the solid surface on flow state

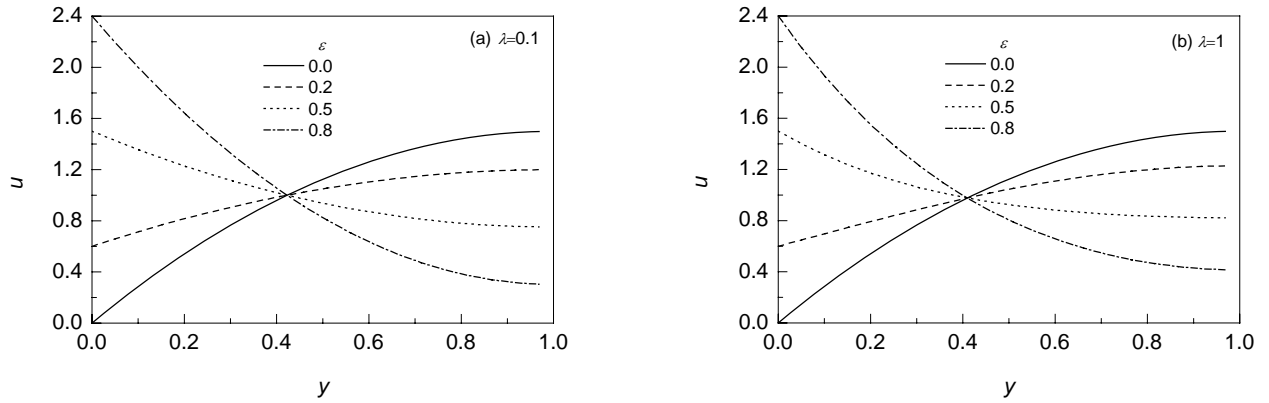


图 4  $\varepsilon$ 和 $\lambda$ 对主流速度的影响  
Fig.4 Effects of  $\varepsilon$  and  $\lambda$  on  $u$

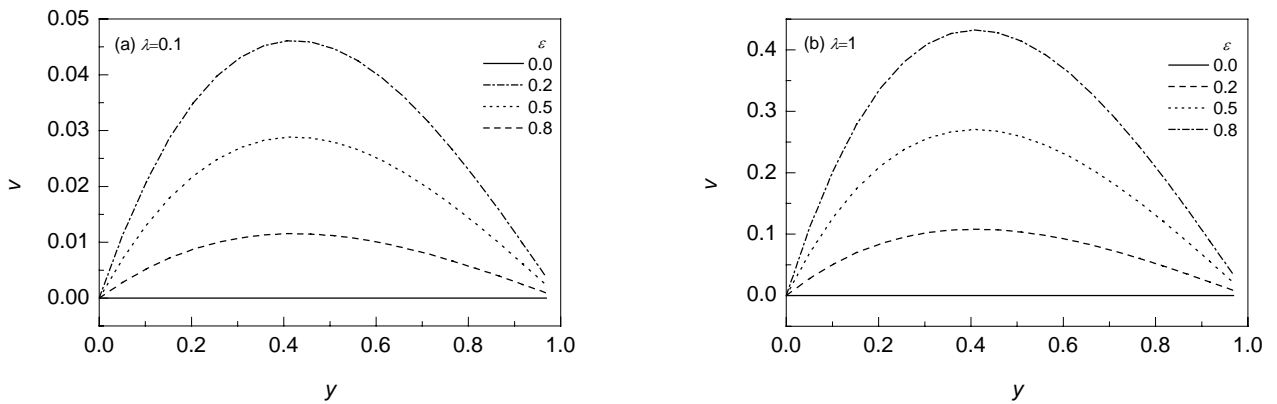


图 5  $\varepsilon$ 和 $\lambda$ 对纵向流速的影响  
Fig.5 Effects of  $\varepsilon$  and  $\lambda$  on  $v$

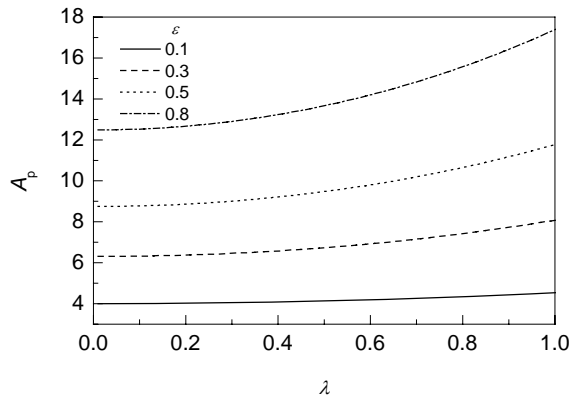


图 6  $\varepsilon$ 和 $\lambda$ 对压力扰动的影响  
Fig.6 Effects of  $\varepsilon$  and  $\lambda$  on pressure variation

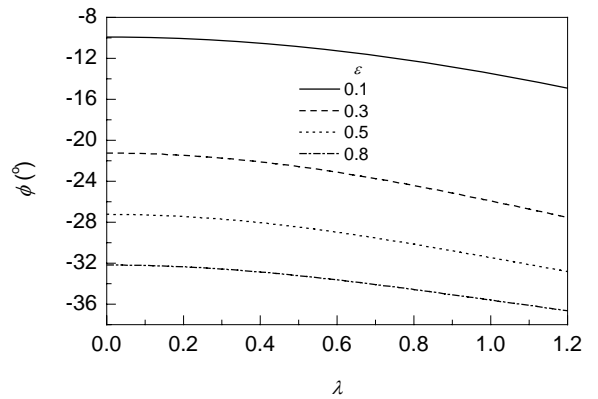


图 7  $\varepsilon$ 和 $\lambda$ 对压力扰动相位的影响  
Fig.7 Effects of  $\varepsilon$  and  $\lambda$  on phase of the pressure variation

通道壁面的波纹越高, 波长越小, 引起的压力变化越大。由图 7 可知, 压力变化的相位角滞后于壁面波纹, 波纹波幅越大, 波长越小, 相位的滞后越多。

图 8 表示按比拟理论, 由波纹通道的阻力特性推知的传热特性,  $Nu_{w,m}$  表示波纹壁面沿长度方向的平均努

谢尔特数。图形显示, 当 $\varepsilon$ 和 $\lambda$ 增大时, 传热性能都将提高, 在 $\varepsilon$ 和 $\lambda$ 较大时, 提高更明显, 这与压力的扰动类似。事实上, 压力的扰动必然引起壁面阻力相同的变化, 按动量传递与热量传递的比拟理论, 这自然引起传热特性相应的变化。

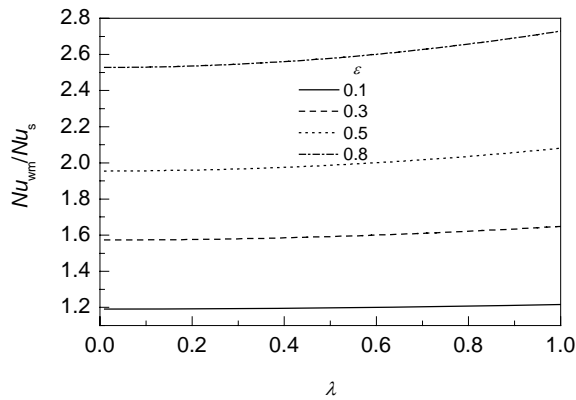


图8 传热的比拟

Fig.8 The analogy of heat transfer to momentum transfer

因为对同一类问题的研究角度、方法各不相同,各研究者的研究结果不好作量的比较,但定性来说,波纹壁面会增大流动阻力,增强传热,流体各扰动量的分布、幅值及其相位随波纹参数的关系则具有共同的趋势。

## 5 结语

本工作在高粘度流体、小波幅波纹壁面的前提下,通过对流动过程的理论分析,对动量方程用摄动展开法,导出了波纹壁面通道层流状态下流动的近似分析模型,得到了这种情况下的无量纲流函数、流速、压力的解析关系式,提出了波纹通道与平直通道传热特性的比拟关系式。

分析表明,波纹通道将引起流体流动与传热的扰动,在本研究情况下这些扰动的频率与壁面波纹的频率相同,但相位滞后。压力扰动的幅值、相位角的滞后及传热的强化都随壁面波纹的增高与加密而增大。

### 符号表:

$A$	波纹板的波幅 (m)	$A_p$	无量纲压力波动值
$C$	摩擦系数	$g$	重力加速度 ( $m/s^2$ )
$H$	通道平均高度的一半 (m)	$i$	虚数单位
$k$	量级为 1 的参数	$L$	壁面波纹的波长 (m)
$Nu$	努谢尔特数	$p$	压力 (Pa)
$Pr$	普朗特数	$Re$	雷诺数
$St$	斯坦顿数	$u$	横坐标方向分速度 (m/s)
$v$	纵坐标方向分速度 (m/s)	$x$	横坐标 (m)
$y$	纵坐标 (m)	$\varepsilon$	波纹板无量纲波幅
$\phi$	初始相位角 ( $^\circ$ )	$\lambda$	无量纲波数 ( $\lambda=2\pi H/L$ )
$\mu$	动力粘度 (Pa·s)	$\nu$	运动粘度 ( $m^2/s$ )
$\rho$	密度 ( $kg/m^3$ )	$\psi$	无量纲流函数
$\Gamma$	通道单位宽度上的体积流量 ( $m^2/s$ )		

上、下标  
' 分离函数  $F$  对  $y$  坐标求导  
0, 1, 2 相应变量的零级、一级、二级近似值  
 $m$  平均值  $s$  光滑平直表面  
 $w$  波纹表面  $x, y$  相应变量对坐标  $x, y$  求导

### 参考文献:

- [1] 范文元. 化工单元操作节能技术 [M]. 合肥: 安徽科学技术出版社, 1999. 94.
- [2] 方书起, 祝春进, 吴勇, 等. 强化传热技术与新型高效换热器研究进展 [J]. 化工机械, 2004, 31(4): 249-253.
- [3] 周昆颖. 紧凑型换热器 [M]. 北京: 中国石化出版社, 1998. 18-21.
- [4] Negney S, Meyer M, Prevost M. Study of a Laminar Falling Film Flowing over a Wavy Wall Column: Part I. Numerical Investigation of the Flow Pattern and the Coupled Heat and Mass Transfer [J]. Int. J. Heat Mass Transfer, 2001, 44: 2137-2146.
- [5] Negney S, Meyer M, Prevost M. Study of a Laminar Falling Film Flowing over a Wavy Wall Column: Part II. Experimental Validation of Hydrodynamic Model [J]. Int. J. Heat Mass Transfer, 2001, 44: 2147-2154.
- [6] 李大鹏, 焦增庚, 孙丰瑞. 波纹板换热器板间流动与传热的有限元计算分析 [J]. 燃气轮机技术, 2002, 15(3): 56-59.
- [7] 曾敏, 王秋旺, 屈治国, 等. 波纹管内强制对流换热与阻力特性的实验研究 [J]. 西安交通大学学报, 2002, 36(3): 237-240.
- [8] 金志浩, 王关晴, 刘洁, 等. 波纹板内流体流动特性的数值模拟 [J]. 水动力学研究与进展, 2004, 19(1): 26-30.
- [9] 任泽霖, 蔡睿贤. 热工手册 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2002. 38.
- [10] 钱滨江. 简明传热手册 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1983. 155-157.

## An Approximate Model of a High Viscosity Liquid Flowing inside a Wavy Plate Duct

SHI Jin-sheng

(College of Mechanical Engineering, Tianjin University of Science & Technology, Tianjin 300222, China)

**Abstract:** A research of a high viscosity liquid flowing inside a wavy plate duct is carried out with a mathematic modeling. The governing equations with their boundary conditions are firstly non-dimensionalized. Then a dimensionless stream function is introduced. By perturbation expanding, an approximate model has been developed. Analytical expressions for stream function, velocity and pressure variations along the duct are obtained. The effects of the amplitude and wavelength of the wavy plate duct on the flow state are discussed. Meanwhile, a preliminary estimation based on analogy theorem of the heat transfer enhancement to the flow friction increase is made.

**Key words:** highly viscosity; wavy surface; flow; perturbation expansion; modeling