1996 年 10 月
第 26 卷第 5 期

西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)

Oct. 1996
Vol. 26 No. 5

①
395-396

BCI 拓扑代数的几个代数问题*

O189.2

胡庆平

(西北大学数学系,710069,西安;52岁,男,教授)

A **摘 要** 对 BCI 拓扑代数的几个代数问题 BCI-TOP 的可积性、新拓扑代数的生成法及 Abel 子范畴 AS-BCI-TOP 等 进行了讨论,得到了相应的结果。

关键词 BCI 代数;拓扑空间;BCI 拓扑代数;范畴

分类号 O153.1

1982年引入了 BCI 拓扑代数,且得到了一些结果(见文献1)。用BCI-TOP 表示一切 BCI 拓扑代数作成的类,两个 BCI 拓扑代数间的同态映射概念是自明的(对 BCI 代数保证同态,对拓扑保证连续),Hom (X_1,X_2)表示从 X_1到 X_2的一切同态映射的集合。易验知以下定理。

定理1 对于任意的基数 $\gamma\geqslant 1$,存在一个 BCI 拓扑代数 X_γ,使得$|X_\gamma|=\gamma$。一切(结合、广义结合)BCI 拓扑代数和它们间的同态映射作成范畴ZBCI-TOP(相应地,AS-BCI-TOP 和GAS-BCI-TOP)。

逐一验证可进一步得到以下定理:

定理2 BCI-TOP 是具有积的一个范畴,且对于BCI-TOP 中任意一族对象$\{<X_\alpha;*_\alpha,O_\alpha,J_\alpha>:\alpha\in I\}$,$\{<X;*,O,J>,P_\alpha:\alpha\in I\}$是这一族对象的积,其中$<X;*,O,J>$是这一族 BCI 拓扑代数的积代数,$P_\alpha$ 为射影映射。

定理3 BCI-TOP 中积的万有性质成立。

BCI 拓扑代数$<X;*,O,J>$的子代数 A 是$<X;*,O>$的子代数,且具有关于 J 的相对拓扑 J_A。易验知。

定理4 如果 A 是 BCI 拓扑代数$<X;*,O,J>$的一个子代数,则$<A;*,O,J_A>$是一个拓扑代数,其中 J_A 表示 A 上关于 J 的相对拓扑。

定理5 如果 A 是$<X;*,O,J>$的子代数,B 是$<A;*,O,J_A>$的子代数,则 $B\in SA(X)$(即$<X;*,O,J>$的子代数)。

定理6 设 f 是$<X_1;*1,O_1,J_1>$到$<X_2;*_2,O_2,J_2>$的一个同态映射。则 $ker(f)\in SA(X_1)$;如果 $S_1\in SA(X_1)$,则 $f[S_1]\in S(X_2)$;如果 f 是到上的,$U_2\in SA(X_2)$,则 $f^{-1}[U_2]\in SA(X_1)$。

定理7 设$<X;*,O,J>$是一族$\{<X_\alpha;*_\alpha,O_\alpha,J_\alpha>:\alpha\in I\}$的积代数。如果 $A\in SA(X)$,则 $P_\alpha[A]\in SA(X_\alpha)$;如果 $A_\alpha\in SA(X_\alpha)$,则 $\prod\{A_\alpha:\alpha\in I\}\in SA(X)$。

定理8 设$<X;*,O,J>$是 BCI 拓扑代数,A 为$<X;*,O>$的理想,$<X/A;*,C_0>$为商代数,赋以商拓扑 J'_A。则$<X/A;*,Co,J'_A>$是 BCI 拓扑代数(称为$<X;*,O,J>$关于 A 的商代数>,且自然映射 $P_A:X\rightarrow X/A$ 是同态映射。

定理9 设 f 是$<X;*,O,J>$到$<Y;\lambda,\theta,S>$上的同态映射。则 $g:<X/kerf;*,Co,J'_{kerf}>\cong<Y;\lambda,\theta,S>$,$C_x\rightarrow f(x)$;$f$ 是一个同构映射当且仅当 $ker\ f=\{0\}$。

---

* 收稿日期:1995-03-18

定理10 在定理9的条件下,如果 B 是 Y 中的一个理想子集,则有同构映射 $g:X/f^{-1}[B]\to Y/B, C_x\to C_{f(x)}$,且 $pof=gop$,其中 p 为自然映射。

记P-BCI-TOP 表示具有性质 P 的一切 BCI 拓扑代数作成的范畴。容易验知以下定理:

定理11 如果 P 是 BCI 拓扑代数的一个可积性,则P-BCI-TOP 是BCI-TOP 的一个可积子范畴。

进一步可逐步验得:

引理1 设 $<X;*,0,J>$ 和 $<Y;\lambda,\theta,S>$ 是两个结合 BCI-拓扑代数。1)如果 $f,g\in \mathrm{Hom}(X,Y)$,命

$$f+g:X\to Y,\qquad x\to f(x)\lambda g(x)。$$

则 $f+g\in \mathrm{Hom}(X,Y)$。2)如果 $f,g\in \mathrm{Hom}(X,Y)$, $m,n\in /N$,则

$$mf=\underbrace{f+\cdots+f}_{m\text{个}}=\underbrace{(f+\cdots+f)}_{m-1}+f\in \mathrm{Hom}(X,Y),$$

$$mf+ng\in \mathrm{Hom}\ (X,Y)。$$

3)$(\mathrm{Hom}(X,Y),+,O)$ 是一个 Abel 群,其中 O 定义为 $O:X\to Y$, $x\to\theta$。4)如果 f, $f_1,f_2\in \mathrm{Hom}(X_1,X_2)$, $g,g_1,g_2\in \mathrm{Hom}(X_2,X_3)$, $m,n\in Z$,则

$$go(mf_1+nf_2)=mgf_1+ngf_2,$$

$$(mg_1+ng_2)of=mg_1f+ng_2f。$$

引理2 AS-BCI-TOP 是BCI-TOP 的一个加性子范畴。

引理3 AS-BCI-TOP 中每个态射有一个核和一个工核。

引理4 AS-BCI-TOP 中每个单一态射是它的上核的核;每个满态射是它的核的上核。

引理5 AS-BCI-TOP 中的每个态射可表示为一个满态射和一个单一态射的复合。

由这些引理可得下列结果:

定理12 AS-BCI-TOP 是BCI-TOP 的 Abel 子范畴。

参考文献

1 胡庆平. BCI-代数. 西安:陕西科技出版社,1987

2 Kelley J L. General Topology. New York:Springer Verlag, 1955

3 Mac Lane S. Categories for the Working Mathematician. New York: Springer Verlag, 1971

责任编辑 张素敏

Several Algebraic Problems on BCI-topological Algebras

Hu Qingping

(Department of Mathematics, Northwest University, 710069, Xi'an)

Abstract some discussions are made on several algebraic problems on BCI-topological algebras, mainly on the product property of BCI-TOP, the methods of generations of new BCI-topological algebras and the subcategories of BCI-TOP etc. , and the corresponding results are got.

Key words BCI-algebra; topological space; BCI-topological algebra; category