1996 年 12 月
第 26 卷第 6 期

西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)

Dec. 1996
Vol. 26 No. 6

④
477-480

高维非线性周期系统的平稳振荡*

O175.13

陈宽民
(西安公路交通大学基础部,710061,西安;38 岁,男,副教授)

A
摘　要　通过引入非自治系统是 p-吸引的概念,从而得到一个平稳振荡定理,并改进和推广了有关结果。

关键词　非线性周期系统;平稳振荡;w 周期解

非自治系统

分类号　O175.13

非线性振荡问题,一直是人们十分关注的问题之一。就解决高维非线性周期系统

$$\dot{x}=f(t,x),x\in R^n \tag{1}$$

存在平稳振荡问题而言,著名的 Lasalle 平稳振荡定理[1]起着非常重要的作用;随后文献 2～5 等做了进一步研究,得到较好的结果。本文首先引入系统(1)是 p-吸引的概念,由此得到系统(1)存在唯一稳定周期解的一般性平稳振荡定理;然后,应用此定理并采用比较方法和李雅普诺夫函数方法,我们得到系统(1)存在平稳振荡的若干结果。本文所得结论改进和推广了文献 2～5 的有关结论。

1　平稳振荡定理

考虑非线性周期系统

$$\dot{x}=f(t,x), \tag{1}$$

其中向量函数 $f(t,x)\in c[I\times R^n,R^n]$,且关于 t 以 $w(>0)$ 为周期和关于 x 满足 Lipschitz 条件。以下总假定系统(1)满足初值条件 $x(t_0)=x_0$ 的解 $x(t,t_0,x_0)(t\geqslant t_0)$ 在 $I=[t_0,+\infty)$ 上存在。

为了能够刻划系统(1)之任意两个解 $x(t,t_0,x_0)$ 和 $y(t,t_0,y_0)$ 在充分大时刻 T 以后的任意接近程度,我们引入下述定义。

定义　如果对系统(1)的每一对解 $x(t,t_0,x_0)$ 和 $y(t,t_0,y_0)$,存在 $p\in(0,1)$ 和 $T=T(p,t_0,x_0,y_0)>0$,使对一切 $t\geqslant T+t_0$ 有

$$\| x(t,t_0,x_0)-y(t,t_0,y_0)\| \leqslant p\| x_0-y_0\| 。 \tag{2}$$

则称系统(1)是 p-吸引的。

注 1　定义中的 $p\in(0,1)$ 为常数;时刻 T 与 p 以及解的初始时刻和初始位置有关,记做:$T(p,t_0,x_0,y_0)$。

引理　如果系统(1)是 p-吸引的,则系统(1)的所有解当 $t\to+\infty$ 时相互逼近。

证明　设(1)满足初值条件 $x(t_0)=x_0$ 和 $y(t_0)=y_0$ 的解分别为 $x(t,t_0,x_0)$ 和 $y(t,t_0,y_0)>0$。使对一切 $t\geqslant T_1+t_0$ 有 $\| x(t,t_0,x_0)-y(t,t_0,y_0)\| \leqslant p_0\| x_0-y_0\|$ 。

特别当 $t=T_1+t_0$ 时,记 $x_{T_1}=x(T_1+t_0,t_0,x_0)$ 和 $y_{T_1}=y(T_1+t_0,t_0,y_0)$,则有

$$\| x_{T_1}-y_{T_1}\| \leqslant p_0\| x_0-y_0\| 。 \tag{3}$$

考虑(1)从 T_1+t_0 出发,满足初值条件 $x(T_1+t_0)=x_{T_1}$,$y(T_1+t_0)=y_{T_1}$ 的解 $x(t,T_1+t_0,x_{T_1})$ 和 $y(t,T_1$

* 收稿日期:1996-02-29

$+t_0,y_{T_1})$。由(1)是p-吸引的,则存在$p_1\in(0,1)$和$T_2=T_2(p_1,T_1+t_0,x_{T_1},y_{T_1})>0$,使对一切$t\geqslant\sum_{k=1}^{2}T_k+t_0$有

$$\|x(t,T_1+t_0,x_{T_1})-y(t,T_1+t_0,y_{T_1})\|\leqslant p_1\|x_{T_1}-y_{T_1}\|。\tag{4}$$

若记L_x和L_y分别是由解$x(t,t_0,x_0)$和$y(t,t_0,y_0)$所定义之轨线的集合,由解的唯一性知:$x(t,T_1+t_0,x_{T_1})\subset L_x$和$y(t,T_1+t_0,y_{T_1})\subset L_y$。注意到(3)式,(4)式即为

$$\|x(t,T_1+t_0,x_{T_1})-y(t,T_1+t_0,y_{T_1})\|\leqslant p_0p_1\|x_0-y_0\|。\tag{5}$$

同理,考虑(1)从$\sum_{k=1}^{2}T_k+t_0$出发,满足初值条件$x(\sum_{k=1}^{2}T_k+t_0)=x_{T_2}=x(\sum_{k=1}^{2}T_k+t_0,T_1+t_0,x_{T_1})$,$y(\sum_{k=1}^{2}T_k+t_0)=y_{T_2}=y(\sum_{k=1}^{2}T_k+t_0,T_1+t_0,y_{T_1})$的解$x(t,\sum_{k=1}^{2}T_k+t_0,x_{T_2})$和$y(t,\sum_{k=1}^{2}T_k+t_0,y_{T_2})$。由(1)是$p$-吸引的,则存在$p_2\in(0,1)$和$T_3=T_3(p_2,\sum_{k=1}^{2}T_k+t_0,x_{T_2},y_{T_2})>0$,使对一切$t\geqslant\sum_{k=1}^{3}T_k+t_0$有

$$\|x(t,\sum_{k=1}^{2}T_k+t_0,x_{T_2})-y(t,\sum_{k=1}^{2}T_k+t_0,y_{T_2})\|\leqslant p_2\|x_{T_2}-y_{T_2}\|,\tag{6}$$

且$x(t,\sum_{k=1}^{2}T_k+t_0,x_{T_2})\subset L_x$和$y(t,\sum_{k=1}^{2}T_k+t_0,y_{T_2})\subset L_y$,注意到(5)式(取$t=\sum_{k=1}^{2}T_k+t_0$),(6)式即为 $\|x(t,\sum_{k=1}^{2}T_k+t_0,x_{T_2})-y(t,\sum_{k=1}^{2}T_k+t_0,y_{T_2})\|\leqslant p_0p_1p_2\|x_0-y_0\|$。

由归纳法可得:

$$\|x(t,\sum_{k=1}^{m}T_k+t_0,x_{T_m})-y(t,\sum_{k=1}^{m}T_k+t_0,y_{T_m})\|\leqslant p_0p_1p_2\cdots p_m\|x_0-y_0\|,\tag{7}$$

其中$p_i\in(0,1)$,$x_{T_{i+1}}=x(\sum_{k=1}^{i+1}T_k+t_0,\sum_{k=1}^{i}T_k+t_0,x_{T_i})$,$y_{T_{i+1}}=y(\sum_{k=1}^{i+1}T_k+t_0,\sum_{k=1}^{i}T_k+t_0,y_{T_i})$,且$x(t,\sum_{k=1}^{i+1}T_k+t_0,x_{T_{i+1}})\subset L_x$和$y(t,\sum_{k=1}^{i+1}T_k+t_0,y_{T_{i+1}})\subset L_y$,$0\leqslant i\leqslant m$为整数。当$m=0$时(7)式定义为

$$\|x(t,t_0,x_0)-y(t,t_0,y_0)\|\leqslant p_0\|x_0-y_0\|。$$

令$\delta_0=p_0,\delta_1=p_0p_1,\delta_2=p_0p_1p_2,\cdots,\delta_m=p_0p_1p_2\cdots p_m$,则

$$\|x(t,\sum_{k=1}^{m}T_k+t_0,x_{T_m})-y(t,\sum_{k=1}^{m}T_k+t_0,y_{T_m})\|\leqslant\delta_m\|x_0-y_0\|。$$

由于级数$\sum_{m=0}^{+\infty}\delta_m$收敛,从而$\delta_m\to0(m\to+\infty)$。因此

$$\lim_{m\to+\infty}\|x(t,\sum_{k=1}^{m}T_k+t_0,x_{T_m})-y(t,\sum_{k=1}^{m}T_k+t_0,y_{T_m})\|=0,$$

亦即 $\lim_{t\to+\infty}\|x(t,t_0,x_0)-y(t,t_0,y_0)\|=0$。

由$t_0\in I$,$x_0,y_0\in R^n$的任意性知,(1)的所有解当$t\to+\infty$时相互逼近。

定理1 如果存在I上的非负连续函数$p(t)$,且$\lim_{t\to+\infty}p(t)=p_0$,$0\leqslant p_0<1$,使对系统(1)的任意两个解$x(t,t_0,x_0)$和$y(t,t_0,y_0)$均有

$$\|x(t,t_0,x_0)-y(t,t_0,y_0)\|\leqslant p(t)\|x_0-y_0\|。\tag{8}$$

则系统(1)存在唯一稳定的w周期解(即(1)存在平稳振荡)。

证明 由$0\leqslant p_0<1$知,存在实数$\varepsilon>0$,使得$0<p_0+\varepsilon<1$;记$p_0+\varepsilon=p$,则$p\in(0,1)$。对$\forall x_0\in R^n$,系统(1)存在唯一解$x(t,t_0,x_0)$,现于相空间R^n上定义Poincaré映射Q:$Qx_0=x(t_0+w,t_0,x_0)$。

设$y(t,t_0,y_0)$是系统(1)满足初值条件$y(t_0)=y_0$的解。由$\lim_{t\to+\infty}p(t)=p_0$,对上述$\varepsilon$,或即$p$,必存在自然数$m$,使得$p(t_0+mw)\leqslant p$。由(8)式可得

$$\|x(t_0+mw,t_0,x_0)-y(t_0+mw,t_0,y_0)\|\leqslant p\|x_0-y_0\|,\tag{9}$$

且$Q^mx_0=x(t_0+mw,t_0,x_0)$。因此 $\|Q^mx_0-Q^my_0\|\leqslant p\|x_0-y_0\|$,即$Q^m$是$R^n$上的压缩映射,从

而 Q 在 R^n 上有唯一的不动点 x^*，使 $x^*=Qx^*=x(t_0+w,t_0,x^*)$[6]。由(1)右端函数的 w 周期性及解的唯一性知，(1)存在唯一的 w 周期解。又由(9)式知(1)是 p-吸引的，根据引理知(1)的所有其他解当 $t\to+\infty$ 时均逼近于 $x(t,t_0,x^*)$。定理1得证。

注2　当 $p_0=0$ 时，定理1就是文献5中的定理1。

2 应　用

运用微分不等式与比较原理[2]，可得

定理2　设 i) $g\in c[I\times R_+,R]$，方程 $\dot u=g(t,u)$，$u(t_0)=u_0\geqslant 0$ 有唯一解 $u(t,t_0,u_0)$ 满足：$u(t,t_0,u_0)\leqslant\delta(t)u_0$，且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\delta(t)=\delta_0$，$0\leqslant\delta_0<1$；

ii) 对 $\forall\ t\in I$，x、$y\in R^n$ 以及充分小的 $\eta>0$ 有

$$\|x-y+\eta(f(t,x)-f(t,y))\|\leqslant\|x-y\|+\eta g(t,\|x-y\|)+o(\eta)。\tag{10}$$

则系统(1)存在平衡振荡。

证明　设 $x_0(t)=x(t,t_0,x_0)$ 和 $y_0(t)=y(t,t_0,y_0)$ 是(1)的任意两个解。定义 $z(t)=x_0(t)-y_0(t)$，则 $\dot z(t)=f(t,x_0(t))-f(t,y_0(t))$。设 $m(t)=\|z(t)\|$，则对充分小的 $\eta>0$。

$$\begin{aligned}m(t+\eta)&=\|z(t+\eta)-z(t)+z(t)\|\\&\leqslant\|x_0(t)-y_0(t)+\eta[f(t,x_0(t))-f(t,y_0(t))]\|+\|\gamma(\eta)\|,\end{aligned}$$

且 $\lim\limits_{\eta\to 0}\dfrac{\|\gamma(\eta)\|}{\eta}=0$。由(10)式即知　$D^+m(t)\leqslant g(t,m(t))$。

再由条件 i) 及微分比较定理可得

$$\begin{aligned}\|x(t,t_0,x_0)-y(t,t_0,y_0)\|&=m(t)\\&\leqslant u(t,t_0,\|x_0-y_0\|\\&\leqslant\delta(t)\|x_0-y_0\|,\end{aligned}$$

且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\delta(t)=\delta_0$，$0\leqslant\delta_0<1$。根据定理1知(1)存在平稳振荡。

注3　定理2包含和推广了文献2中的定理2.15.2。

众所周知，李雅普诺夫函数方法是研究微分方程解的性态的有力工具。下面我们给出运用李雅普诺夫函数方法，并借助于定理1而得到的定理3和定理4。其定理的证明方法类似于文献5中相关定理的证明，故略去。定理3和定理4包含和推广了文献3～5中的有关结论。

考虑系统(1)的相伴系统：

$$\begin{cases}\dot x=f(t,x),\\ \dot y=f(t,y)。\end{cases}\tag{11}$$

定理3　如果存在 $V(t,x,y)\in c^{(1)}[I\times R^{2n},R_+]$，满足

i) 存在正常数 a、b、r，使得 $a\|x-y\|^r\leqslant V(t,x,y)\leqslant b\|x-y\|^r$；

ii) $\dot V(t,x(t),y(t))|_{(11)}\leqslant\delta(t)V(t,x(t),y(t))$，

$\delta(t)$ 是 I 上的连续函数，且 $0\leqslant\exp(\frac{1}{r}\int_{t_0}^{+\infty}\delta(s)\mathrm{d}s)<(\frac{a}{b})^{\frac{1}{r}}$。则系统(1)存在平稳振荡。

定理4　如果存在正定对称的 $n\times n$ 常量矩阵 p，使得　$M(t,x)=p(\frac{\partial f}{\partial x})+(\frac{\partial f}{\partial x})^*p$ 的所有特征值 $\lambda_i(t,x)\leqslant-\delta(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$\delta(t)$ 是 I 上的非负连续函数，且 $0\leqslant\exp(-\frac{1}{2b}\int_{t_0}^{+\infty}\delta(s)\mathrm{d}s)<(\frac{a}{b})^{\frac{1}{2}}$。其中 $(\frac{\partial f}{\partial x})$ 是 $f(t,x)$ 的连续 Jacobian 矩阵，$a=\lambda_{\min}(p)$，$b=\lambda_{\max}(p)$。则系统(1)存在平稳振荡。

参 考 文 献

1　秦元勋，王慕秋，王联．运动稳定性理论与应用．北京：科学出版社，1981

2 Lakshmikantham V, Leela S. Differential and Integral Inequalities Theory and Application. New York-London:Acad Press, 1969

3 Yoshizawa T. Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions. New York: Springer-Verlag, 1975

4 王联,王慕秋. 高维周期耗散系统中的一个平稳振荡定理. 中国科学(A),1982(7):607~614

5 李黎明. 高维非自治系统的平稳振荡. 应用数学学报,1989(2):196~204

6 张石生. 不动点理论及应用. 重庆:重庆出版社,1984. 29

责任编辑 张素敏

Stationary Oscillation of Higher-Dimensional Nonlinear Periodic Systems

Chen Kuanmin

(Xi'an Highway Transportation University, 710061, Xi'an)

Abstract A new concept of p-attractive of the nonautonomous system is intfoduced and a stationary oscillation theorm is obtained. The are improved and extended.

Key words nontinear perodic system; stationary oscillation; ω-periodic solution

(上接第470页)

A new Generalized Root-Root Estimator of the Regression Coefficient in the Multivariate Linear Model

Xia Zhengmao Liang Jiarong

(Department of Mathematics, Northwest University, 710069, Xi'an)

Abstract A new generalized root-root estimator is considered in multivariate linear model. By using the matrix transformation theory, it proved the generalized root-root estimator, under the quadratic loss function, is superior to both LSE and RRE, and is also a linear admissible estimator of the regression coefficient.

Key words multivariate linear model; generalized root-root estimator; admissible estimator; mean square error

·学术动态·

西北大学"211工程"建设的总体目标

到本世纪末,使学校的办学条件得到明显改善,教育质量、学术水平和办学效益显著提高,学校综合实力和整体水平居全国省属高校的前列;到2012年建校100周年时,把学校建设成为有特色的国内一流、国际知名的社会主义现代化综合大学,若干重点学科达到或接近国际先进水平,成为国家和地方高层次人才培养与科学研究基地,成为促进陕西和西北区域经济发展、社会进步的重要力量。 (薛 鲍)

西北大学"211工程"建设的总体思路

坚持党的基本路线和社会主义办学方向,全面贯彻"科教兴国"战略和党的教育方针,认真落实《中国教育改革和发展纲要》;主动适应国家、地方经济建设和社会发展的需要以及世界科技文化发展的新趋势;遵循教育发展规律、重点突破、发挥优势、办出特色的方针,坚持走高质量、高水平、高效益的发展道路;加大改革力度,扩大开放视野,以改革促发展,在发展中求提高;面向现代化,面向世界,面向未来,更新教育思想,强化为地方和区域经济服务的观念,探索出一条地方大学改革和发展的新路子。

(薛 鲍)