1995 年 2 月
第 25 卷 第 1 期

西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)

Feb. 1995
Vol. 25 No. 1

9-10

关于 Pell 方程组解的上界估计*

何宗友
(汉江机床厂,723003;陕西汉中;22 岁,男,技术员)

O151

摘 要 运用 Baker 方法给出 Pell 方程组 $x^2-Ay^2=1, y^2-Bz^2=1$ 解的上界估计。

关键词 裴尔方程组; 上界; 贝克尔方法 贝克方法, Pell方程组, 估计

分类号 O156.7

关于 Pell 方程组

$$x^2-Ay^2=1, y^2-Bz^2=1 \tag{1}$$

的解。Mohanty S P and Ramasay A M S,曾珍富,陈建华[1,2]曾研究了当 $A=8, B=\prod_{i=1}^{n}P_i, 1\leqslant n\leqslant 4, P_i$ 是素数时的部分情况,获得了一些结果。本文则运用 Baker 方法给出 Pell 方程组(1)解的上界估计。即就是证明

定理 Pell 方程组(1)符合条件

$$\rho^2>C\left(1+\frac{AC}{\varepsilon^4}\right) \tag{2}$$

时,解满足

$$y\leqslant\frac{\rho^D+\bar{\rho}^D}{2} \tag{3}$$

其中 $C=\frac{1}{A}+\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A}-(A+1)\bar{\varepsilon}^3}$; $D=[4^{734}(\log(\max(2x_0, 2y_{02})))^{49}]-1$, $\varepsilon=x_0+y_{01}\sqrt{A}$, $\bar{\varepsilon}=x_0-y_{01}\sqrt{A}$; $\rho=y_{02}+z_0\sqrt{B}$, $\bar{\rho}=y_{02}-z_0\sqrt{B}$, y_{01} 和 y_{02} 分别表示 y 在 Pell 方程组(1)第一个方程和第二个方程中的最小正整数解。$[x]$ 表示不小于 x 的最小整数。

证明 由 Pell 方程的解法给出 $y_m=\frac{\varepsilon^m-\bar{\varepsilon}^m}{2\sqrt{A}}$, $y_l=\frac{\rho^l+\bar{\rho}^l}{2}$

如果 $y=y_m=y_l$,则有 $\quad 2y=\frac{\varepsilon^m}{\sqrt{A}}-\frac{\bar{\varepsilon}^m}{\sqrt{A}}=\rho^l+\bar{\rho}^l$

令 $p=\frac{\varepsilon^m}{\sqrt{A}}$, $Q=\rho^l$,有 $\quad p-\frac{1}{A}p^{-1}=Q+Q^{-1}$

因为 $p^{-1}>0, Q^{-1}>0$,上式给出 $p>Q, p^{-1}<Q^{-1}$,从而

$$p=Q+Q^{-1}+\frac{1}{A}p^{-1}<Q+\frac{A+1}{A}Q^{-1}<Q+\frac{A+1}{A}$$

故得 $\quad Q>p-\frac{A+1}{A}$。 (4)

假设 $m\geqslant3$,有 $\quad p=\frac{\varepsilon^m}{\sqrt{A}}\geqslant\frac{\varepsilon^3}{\sqrt{A}}$

所以由式(4)和 $\left(p-\frac{A+1}{A}\right)^{-1}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A}-(A+1)\bar{\varepsilon}^m}p^{-1}<\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A}-(A+1)\bar{\varepsilon}^3}p^{-1}$,

* 收稿日期:1994-05-14

得 $p-Q=\frac{1}{A}p^{-1}+Q^{-1}<\frac{1}{A}p^{-1}+(p-\frac{A+1}{A})^{-1}<(\frac{1}{A}+\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A}-(A+1)\bar{\varepsilon}^{3}})p^{-1}=cp^{-1}$。

另外

$$0<\log\frac{p}{Q}=-\log(1-\frac{p-Q}{p})=\frac{p-Q}{p}+\frac{(p-Q)^{2}}{2p^{2}}+\frac{(p-Q)^{3}}{3p^{3}}+\cdots \tag{5}$$

由 $n\geqslant 3$，易知 $\frac{(p-Q)^{n}}{np^{n}}<\frac{(p-Q)^{2}}{2^{n-1}p^{2}}$

故由式(5)得

$$0<\log\frac{p}{Q}<\frac{p-Q}{p}+\frac{(p-Q)^{2}}{p^{2}}+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2}}+\cdots)$$

$$=\frac{p-Q}{p}+\frac{(p-Q)^{2}}{p^{2}}<cp^{-2}+(cp^{-2})^{2}$$

$$=cp^{-2}(1+cp^{-2})<cp^{-2}(1+c(\frac{\sqrt{A}}{\varepsilon^{3}})^{2})$$

$$=c(1+\frac{Ac}{\varepsilon^{6}})p^{-2}$$

把 p,Q 的值代入上式，得

$$0<m\log\varepsilon-l\log\rho-\log\sqrt{A}<c(1+\frac{Ac}{\varepsilon^{6}})p^{-2}=Ac(1+\frac{Ac}{\varepsilon^{6}})\bar{\varepsilon}^{2m}。 \tag{6}$$

现在，应用 Baker 方法。这时代数数个数 $n=3$。设 $\alpha_1=\varepsilon,\alpha_2=\rho,\alpha_3=\sqrt{A}$。由 $\varepsilon^2=2x_0\varepsilon-1,\rho^2=2y_{02}\rho-1$ 和 $\alpha_3^2=A$，可知代数数 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的次数都不超过 $d=4$，高都不超过 $h=\max(2x_0,2y_{02})$。又因式(4)可知，$l\geqslant m$，故有 $H=\max(1,m,l)=l$。因为 $p>Q,p^2>Q^2$，故 $\frac{\varepsilon^{2m}}{A}>\rho^{2l}>\frac{A\rho^2}{A}e^l$。

由此得到 $\varepsilon^{2m}>2\rho^2e^l$，故得 $A\rho^2\bar{\varepsilon}^{2m}<e^{-l}$。于是由式(2)和式(6)得

$$0<m\log\varepsilon-l\log\rho-\log\sqrt{A}<\varepsilon^{-l}$$

这相当于 δ 的取值为 1，于是满足 Baker 方法的所有条件，可得

$$H=l<(4^{n^2}\delta^{-1}d^{2n}\log h)^{(2n-1)^2}$$

$$=(4^{3^2}\times1^{-1}\times4^{2\times3}\ \log(\max(2x_0,2y_{02})))^{(2\times3+1)^2}=4^{735}(\log(\max(2x_0,2y_{02})))^{-49}。$$

即 $l\leqslant d$，因此 $y=\frac{\rho^l+\bar{\rho}^l}{2}\leqslant\frac{\rho^D+\bar{\rho}^D}{2}$，于是完成了定理的证明。

参 考 文 献

1 曹珍富．关于 Pell 方程 $x^2-2y^2=1$ 和 $y^2-Dz^2=4$ 的公解．科学通报，1986，31(6)：476

2 陈建华．关于 Pell 方程 $x^2-2y^2=1$ 和 $y^2-Dz^2=4$ 的公解．武汉大学学报(自然科学版)，1990(1)：8～12

On Upper Pound Estimation of Solutions of the System of Pell Equations

He Zongyou

(Han Jiang Machine Tool Works, 723003, Hanzhong)

Abstract The upper bound estimation of solutions of the system of Pell equations $x^2-Ay^2=1$、$y^2-Bz^2=1$, with Baker's metod is given.

Key words system of Pell equations; upper bound; Baker's method