1996 年 4 月 第 26 卷 第 2 期
西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)
Apr. 1996 Vol. 26 No. 2

④
105—108

具有完全单 Γ-核的 Γ-半群*

O152.7

赵宪钟
(西北大学数学系,710069,西安:34 岁,男,讲师)

A **摘 要** 证明了:如果一个 Γ-半群的某一相关半群具有完全单核,则它的每一相关半群均有完全单核。引入并讨论了 Γ-半群的 Γ-双理想和 Γ-核等概念。探讨了具有完全单 Γ-核的 Γ-半群,获得了它的若干性质。

关键词 半群;Γ-半群;Γ-半群的相关半群;Γ-双理想;Γ-核 完全单核
分类号 O152.7

设 M 和 Γ 是两个非空集合,称 M 是 Γ-半群[1],如果对任意的 $a,b,c\in M$ 和 $\alpha,\beta\in\Gamma$ 有:$a\alpha b\in M$ 和 $(a\alpha b)\beta c=a\alpha(b\beta c)$ 成立。设 M 是 Γ-半群和 α 是 Γ 中任一确定的元素。如果对任意的 $a,b\in M$,规定 $a\circ b=a\alpha b$,则"$\circ$"为 M 上的二元运算,且 $(M,\circ)$ 是半群,记其为 M_α,称其为 M 的一个相关半群。如果 Γ-半群 M 的某一相关半群是群,则它的每一相关半群均是群,此时称 M 是 Γ-群[1]。设 M 是 Γ-半群和 I 是 M 的一非空子集,如果 $(I\Gamma M)\cup(M\Gamma I)\subseteq I(M\Gamma I\subseteq I,I\Gamma M\subseteq I)$,则称 I 是 M 的 Γ-理想(左 Γ-理想,右 Γ-理想)。一个异于 M 的(左,右)Γ-理想 I 叫做 M 的真(左,右)Γ-理想。一个没有真(左,右)Γ-理想的 Γ-半群叫做(左,右)单的。设 M 是 Γ-半群和 a 是 M 中任一确定的元素,如果对任意的 $b\in M$ 和 $\alpha\in\Gamma$ 均有:$a\alpha b=b\alpha a=a$,则称 a 是 M 的零元素;显然,如果 M 有零元素,则其唯一,记其为 0;如果对某一 $\alpha\in\Gamma$ 有:$a\alpha a=a$,则称 a 是 M 的 α-幂等元;称 α-幂等元 a 是本原的,如果 $a\neq 0$,且对任一 β-幂等元 f 均有:$f\beta a=a\alpha f=f$ 推出 $f=0$ 或者 $f=a$。一个具有本原幂等元的单 Γ-半群叫做完全单 Γ-半群;一个具有零元素的 Γ-半群 M 叫做零单 Γ-半群,如果 $M\Gamma M\neq\{0\}$,且 M 仅有的真 Γ-理想是 $\{0\}$;一个具有本原幂等元的零单 Γ-半群叫做完全零单 Γ-半群。文献 2 给出了 Ress 矩阵 Γ-半群的概念,并获得了半群理论中的 Rees 定理在 Γ-半群中的推广结果。设 G 是具有幺元素 e 的群,I,Λ 是非空集,Γ 是 $G^\circ=G\cup\{0\}$ 上的若干 $I\times\Lambda$ 矩阵的集合,若令 $M=(G\times I\times\Lambda)\cup\{0\}$,且对任意的 $(a,i,\lambda),(b,j,u)\in M$ 和任意的 $P=(p_{\lambda i})\in\Gamma$ 现定:

$$(a,i,\lambda)P(b,j,u)=\begin{cases}(ap_{\lambda j}b,i,\mu) & (p_{\lambda j}\neq 0)\\ 0 & (p_{\lambda j}=0),\end{cases}$$

和 $(a,i,\lambda)P0=0P(a,i,\lambda)=0$,则 M 是 Γ-半群,记其为 $\mu^\circ[G;I,\Lambda;\Gamma]$,称其为 $I\times\Lambda$ Rees 矩阵 Γ-半群;若 Γ 是正则的,即对任意的 $i\in I$,存在 $P=(p_{\lambda i})\in\Gamma$ 和 $\lambda\in\Lambda$ 使 $p_{\lambda i}\neq 0$ 和对任意的 $\lambda\in\Lambda$,存在 $Q=(q_{\lambda i})\in\Gamma$ 和 $i\in I$ 使 $q_{\lambda i}\neq 0$,则 $\mu^\circ[G;I,\Lambda;\Gamma]$ 是完全零单 Γ-半群。反之,任何一个完全零单 Γ-半群必同构于某一 $I\times\Lambda$ Rees 矩阵 Γ-半群 $\mu^\circ[G;I,\Lambda;\Gamma]$,其中 Γ 是正则的[2]。

设 M 是 Γ-半群,对任意的 $(\alpha,a),(\beta,b)\in\Gamma\times M$,若规定 $(\alpha,a)(\beta,b)=(\alpha,a\beta b)$,则 $\Gamma\times M$ 是半群,

* 陕西省教委专项基金资助课题
收稿日期:1995-01-11

称其为 M 的右算子半群，仍记其为 $\Gamma\times M$、Γ-半群 M 的左算子半群 $M\times\Gamma$ 被对偶地定义[3]。

1 一个结果的推广

设 M 是 Γ-半群，如果 M 的某一相关半群是群，则它的任一相关半群均是群[1]。本节将推广这一结果。为此，先考查 Γ-半群 M 的右算子半群 $\Gamma\times M$。

现在我们回顾一下几个结果[4]，它们在后面的讨论中是必需的。

引理 1(文献 4，引理Ⅱ4.3) 设 N 是半群 S 的一个极小双理想，则对任意的 $s,t\in S$ 有：SNt 均是 s 的极小双理想。

引理 2(文献 4，引理Ⅱ4.5) 半群 S 的一个双理想 B 是极小的，当且仅当 B 是群。

引理 3(文献 4，引理Ⅱ4.1) 半群 S 如果有极小双理想，则它的一切极小双理想的并 K 是 S 的核。

引理 4 具有极小双理想的半群 S 的核是完全单半群。

证明 由引理 3 知：如果 S 具有极小双理想，则 S 的极小双理想的并 K 是 S 的核。由引理 2 得：K 是群并。我们知道：如果半群 S 有核 K，则 K 是单半群[5]；如果 S 是群并，且是单的，则 S 是完全单的[5]。故具有极小双理想的半群 S 的核是完全单的。

引理 5 如果半群 S 具有核是完全单的，则 S 具有极小双理想。

证明 设完全单半群 $\mu[G;I,\Lambda;P]$ 是半群 S 的核，任意选定 $i\in I$ 和 $\lambda\in\Lambda$，不难直接验证：$A=\{(a,i,\lambda):a\in G\}$ 是 $\mu[G;I,\Lambda;P]$ 的子群，再注意到 $ASA=((p_{\lambda i}^{-1},i,\lambda)A)SA=(p_{\lambda i}^{-1},i,\lambda)(AS)A\subseteq(p_{\lambda i}^{-1},i,\lambda)\mu[G;I,\Lambda;P]A\subseteq\{(a,i,\lambda):a\in G\}=A$，从而，$A$ 是 S 的双理想。依引理 2 得：A 是 S 的极小双理想。

引理 6 设 M 是 Γ-半群和 B 是 M 的右算子半群 $\Gamma\times M$ 的极小双理想，则如下命题成立。

Ⅰ $B=(\alpha,G)$ 其中 α 是 Γ 中与 B 相关的一确定元素，G 是 M_α 的某一极小双理想。

Ⅱ 对一切 $\beta\in\Gamma$ 和(Ⅰ)中的 G，(β,G) 均是 $\Gamma\times M$ 的极小双理想。

证明 Ⅰ 由引理 2 知：B 是 $\Gamma\times M$ 的子群，设其幺元素为 (α,e)，则 $B=(\alpha,e)B=(\alpha,eB)$。令 $G=eB$，那么，$B=(\alpha,G)$。因 (α,G) 是 $\Gamma\times M$ 的极小双理想，所以 $(\alpha,G)(\Gamma\times M)(\alpha,G)=(\alpha,G\Gamma M\alpha G)\subseteq(\alpha,G)$。即，$G\Gamma M\alpha G\subseteq G$，特别，$G\alpha M\alpha G\subseteq G$，也由 (α,G) 是 $\Gamma\times M$ 的子群直接得 G 是 M_α 的子群，再由引理 2 得 G 是 M_α 的极小双理想。

Ⅱ 因 $(\beta,G)=(\beta,e)(\alpha,G)(\alpha,e)$，由引理 1 得：$(\beta,G)$ 是 $\Gamma\times M$ 的极小双理想。

引理 7 设 M 是 Γ-半群和 $\Gamma\times M$ 是 M 的右算子半群及 α 是 Γ 中的任一确定的元素，则 M 的非空子集 G 是 M_α 的极小双理想，当且仅当 (α,G) 是 $\Gamma\times M$ 的极小双理想。

证明 设 G 是 M_α 的极小双理想。由引理 2 知：G 是 M_α 的子群。可直接验证 (α,G) 是 $\Gamma\times M$ 的子群。又 $(\alpha,G)(\Gamma\times M)(\alpha,G)=(\alpha,G\Gamma M\alpha G)=(\alpha,(G\alpha e)\Gamma M\alpha G)=(\alpha,G\alpha(e\Gamma M)\alpha G)\subseteq(\alpha,G\alpha M\alpha G)\subseteq(\alpha,G)$，其中 e 是 G 的幺元素，这说明 (α,G) 是 $\Gamma\times M$ 的双理想。进一步由引理 2 得 (α,G) 是 $\Gamma\times M$ 的极小双理想。

反之，设 $B=(\alpha,G)$ 是 $\Gamma\times M$ 的极小双理想。由引理 2 知 B 是 $\Gamma\times M$ 的子群。设其幺元素为 (α,e)，则 $(\alpha,G)=B=(\alpha,e)B=(\alpha,eB)$，从而 $G=eB$。由引理 6 中Ⅰ知 G 是 M_α 的极小双理想。

由引理 6 和引理 7 直接得：

定理 1 设 M 是 Γ-半群和 G 是 M 的非空子集。如果 G 是 M 的某一相关半群的极小双理想，则 G 是 M 的任一相关半群的极小双理想。

定理 2 设 M 是 Γ-半群，如果 M 的非空子集 K 是 M 的某一相关半群的核，且是完全单的，则 K 是 M 的每一相关半群的核，且是完全单的。

证明 设 α 是 Γ 中的任一确定的元素和 K 是 M_α 的核，且是完全单的，则由引理 5，M_α 具有极小双理想，再由定理 1：知 M 的每一个相关半群具有极小双理想、进一步由定理 1 和引理 3 及引理 4 得 K 是 M 的每一相关半群的核，且是完全单的。

推论 1 设 M 是 Γ-半群，则下列命题成立：

Ⅰ 如果M的某一相关半群是群,则M的每一相关半群是群。

Ⅱ 如果M的某一相关半群是完全单的,则M的每一相关半群是完全单的。

2 具有完全单Γ-核的Γ-半群

定义1 设M是Γ-半群,如果M的一切Γ-理想的交非空,则称其为M的Γ-核。

本节将研究具有Γ-核,且Γ-核是完全单的Γ-半群,即具有完全单Γ-核的Γ-半群,为此先给出Γ-双理想和Γ-拟理想的概念和几个有关的结果。

定义2 设M是Γ-半群和A是M的非空子集。如果A是M的子Γ-半群,且$A\Gamma M\Gamma A\subseteq A$($(A\Gamma M)\cap(M\Gamma A)\subseteq A$),则称$A$是$M$的$\Gamma$-双($\Gamma$-拟)理想。

显然,一个Γ-理想是Γ-拟理想,一个Γ-拟理想是Γ-双理想。

若一个Γ-双理想不真包含其他的Γ-双理想,则称其为极小Γ-双理想。

引理8 设M是Γ-半群。如果N是M的极小Γ-双理想,则对M的任一Γ-双理想B和一切$a,b\in N,\alpha,\beta\in\Gamma$均有$N=a\alpha B\beta b$。

证明 显然,$a\alpha B\beta b$是M的Γ-双理想,又$a\alpha B\beta b\subseteq N\Gamma B\Gamma N\subseteq N\Gamma M\Gamma N\subseteq N$,现在由$N$的极小性得$N=a\alpha B\beta b$。

引理9 设M是Γ-半群,若N是M的极小Γ-双理想,则$\{a\alpha N\beta b:a,b\in M,\alpha,\beta\in\Gamma\}$是$M$的一切极小$\Gamma$-双理想的集合。

证明 设I是M的极小Γ-双理想,由引理8知:存在$a,b\in I$和$\alpha,\beta\in\Gamma$使$I=a\alpha N\beta b$。这样,$I\in\{a\alpha N\beta b:a,b\in M,\alpha,\beta\in\Gamma\}$。现在证明对$a,b\in M$和$\alpha,\beta\in\Gamma$均有$a\alpha N\beta b$是$M$的极小$\Gamma$-双理想。首先,注意到$a\alpha N\beta b$显然是$M$的$\Gamma$-双理想,若假设$a\alpha N\beta b$不是极小的,则存在$M$的$\Gamma$-理想$I$使$I\subset a\alpha N\beta b$,且$I\neq a\alpha N\beta b$,即$I=\{a\alpha x\beta b:x\in X\subseteq N\}$。这样,对任意的$y\in M$,$x_1,x_2\in X$有$a\alpha x_1\beta b\Gamma y\Gamma a\alpha x_2\beta b\subseteq I$,从而,$x_1\beta b\Gamma M\Gamma a\alpha x_2\subseteq X$,又$b\Gamma M\Gamma a$显然是$M$的$\Gamma$-双理想和$x_1,x_2\in N$,再通过$N$的极小性和引理8得$x_1\beta b\Gamma M\Gamma a\alpha x_2=N$,这样,$N\subseteq X$,矛盾!故$a\alpha N\beta b$是$M$的极小$\Gamma$-双理想。

引理10 设M是Γ-半群和B是M的Γ-双理想,我们有B是极小的,当且仅当B是Γ-群。

证明 设B是M的极小Γ-双理想,对任意的$b,c\in B$和$\alpha\in\Gamma$,由引理8知$B=b\alpha B\alpha c$。这样,对任意的$a\in B$,存在$x\in B$使$a=b\alpha x\alpha c$。从而,方程$a=b\alpha y$和$a=z\alpha c$在相关半群B_α中有解,故B的相关半群B_α是群,进一步得B是Γ-群。

反之,设B是Γ-群,若B不是极小的,那么有M的Γ-双理想I使$I\subset B$,且$I\neq B$,令$x\in B$,但$x\notin I$。那么,对任意的$a,b\in I\subseteq B$,存在$y\in B$使$x=a\alpha y\alpha b$(因B_α是群,$y=a^{-1}\alpha x\alpha b^{-1}$),由此,$x\in I\Gamma B\Gamma I\subseteq I\Gamma M\Gamma I\subseteq I$,矛盾!,故$B$是极小的。

定理3 设M是Γ-半群和A是M的非空子集,则A是M的极小Γ-双理想当且仅当A是某一相关半群$M_\alpha(\alpha\in\Gamma)$的极小双理想。

证明 设A是M的极小Γ-双理想,由引理8知A是M的子Γ-群,从而,A是相关半群M_α的子群。又由A是M的Γ-双理想可直接得A是M_α的双理想,故由引理2得:A是M_α的极小双理想。

反之,设A是M的某一相关半群M_α的极小双理想,则由定理1知A是M的任一相关半群的极小双理想。这样,由引理2得A是M的子Γ-群。又$A\Gamma M\Gamma A=(A\alpha e)\Gamma M\Gamma(e\alpha A)=A\alpha(e\Gamma M\Gamma e)\alpha A\subseteq A\alpha M\alpha A\subseteq A$,其中$e$是$A$的相关半群$A_\alpha$的幺元素,即$A$是$M$的$\Gamma$-双理想。故由引理8得$A$是$M$的极小$\Gamma$-双理想。

通过定理1可得定理3的推论2。

推论2 设M是Γ-半群和A是M的非空子集,则A是M的极小Γ-双理想当且仅当A是M的每一相关半群的极小双理想。

定理4 设M是Γ-半群,如果M具有极小Γ-双理想,则M的一切极小Γ-双理想的并是M的Γ-核,且M的Γ-核是完全单的。反之,如果M有完全单Γ-核,则M具有极小Γ-双理想。

证明 由推论2知M的一切极小Γ-双理想的并等于M的任一确定的相关半群的一切极小双理想的并。再由引理3和引理4可得定理的直接部分。反之，如果M有完全单Γ-核，设其为K。那么，由文献2引入的$I\times\Lambda$ Rees矩阵Γ-半群$\mu^{\circ}[G;I,\Lambda;\Gamma]$和给出的$\Gamma$-半群理论中的Rees定理(前面已叙述)，类似于半群中的相应结果，我们有一个Γ-半群M是完全单的当且仅当它同构于某一个Rees矩阵Γ-半群$\mu[G;I,\Lambda;\Gamma]$，其中G是群；I,Λ是两个非空集；Γ是G上的$\Lambda\times I$矩阵的集合，$\mu[G;I,\Lambda;\Gamma]=\{(a,i,\lambda):a\in G,i\in I,\lambda\in\Lambda\}$，对任意的$(a,i,\lambda),(b,j,\mu)\in\mu[G;I,\Lambda;\Gamma]$和$\alpha=(\alpha_{\lambda i})\in\Gamma$有：

$$(a,i,\lambda)\alpha(b,j,\mu)=(a\alpha_{\lambda j}b,i,\mu)。$$

现在设$K=\mu[G;I,\Lambda;\Gamma]$，令$B=\{(a,i,\lambda):a\in G\}$其中$i$和$\lambda$分别是$I$和$\Lambda$中任一确定的元素。那么，可直接验证得$B$是$M$的子$\Gamma$-群。又

$$\begin{aligned}B\Gamma M\Gamma B&=[B\alpha(\alpha_{\lambda i}^{-1},i,\lambda)]\Gamma M\Gamma[(\alpha_{\lambda i}^{-1},i,\lambda)\alpha B]\\&=B\alpha[\alpha_{\lambda i}^{-1},i,\lambda)\Gamma M\Gamma(x_{\lambda i}^{-1},i,\lambda)]\alpha B\\&\subseteq B\alpha K\alpha B=B,\end{aligned}$$

故由引理10有：B是M的极小Γ-双理想。

参 考 文 献

1 Sen M K, Saha N K. On Γ-semigroup I. Bull. Cal. Math. Soc., 1986, 78: 180～186

2 Seth A. Rees's theorem for Γ-semigroup., Bull. Cal. Math Soc., 1988, 81: 217～226

3 赵宪钟. 关于纯整Γ-半群的一点注记. 西北大学学报(自然科学版), 1994, 24(2): 107～109

4 Bogdanovic' S. Semigroups with a system of subsemigroups. Novi Sad: University of Novi Sad, 1985

5 Howie J M. An introduction to semigroup theory. London: Academic Pr., 1976

责任编辑 张素敏

Γ-Semigroups with a Completely Simple Γ-kernel

Zhao Xianzhong

(Department of Mathematics, Northwest University, 710069, Xi'an)

Abstract It is given that if the some related semigroup of a Γ-semigroup has a completely simple kernel, the its every related semigroup has a completely simple kernel. The Γ-bi-ideal and Γ-kernel of a Γ-semigroup are introduced and studied. The some basic properties of a Γ-semigroup with a completely simple Γ-kernel are obtained.

Key words semigroup; Γ-semigroup; related semigroup of Γ-semigroup; Γ-bi-ideal; Γ-kernel