1996 年 2 月　　西北大学学报(自然科学版)　　Feb. 1996
第 26 卷　第 1 期　　Journal of Northwest University (Natural Science Edition)　　Vol. 26　No. 1

⑤ 15—19

多组多滞后线性定常关联控制大系统的结构与关联镇定域的扩大*

TP273

张新政[1)]　商立军[2)]

(1)华南理工大学自动化系,510090,广州;2)第四军医大学数学教研室,710032,西安;第一作者 34 岁,女,副教授)

A
摘　要　给出了由无滞后无扰动结构参数线性定常控制系统的闭环系统的渐近稳定性,推出多组多滞后的线性定常关 联控制系统的闭环系统的关联渐近稳定性的充分条件,从而进一步扩展了滞后镇定域。

关键词　滞后线性定常关联控制系统;结构关联镇定;滞后镇定域

控制系统

分类号　TP273

在控制系统中信号的传递总要产生滞后,因此描述控制系统的模型是带有滞后的控制系统,多层递阶,多回路,多反馈,多输入,多输出之间的响应就是具有多组滞后控制(大) 系统的模型。由于干扰因素的存在,使某些回路暂时中断或又接通时,就使多组多滞后控制系统发生结构的变化,这就需要研究多组多滞后关联控制系统的结构与镇定。文献 1 利用 Lyapunov 等价法给出了开环情形下的等价性定理,定理中要求 τ 是小滞后。本文重新研究了这个问题,把 τ 的要求进一步放宽,并对新旧定理做了几何上的比较。比较结果表明,新定理的滞后镇定域是旧定理的滞后镇定域的 4.5 倍。

1　预备知识与有关引理

今考虑多组多滞后线性定常关联控制系统

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + \sum_{r=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{n} a_{1ij}^{(r)}e_{1ij}^{(r)}x_j(t) + \sum_{s=1}^{N_2}\sum_{j=1}^{n} a_{2ij}^{(s)}e_{2ij}^{(s)}x_j(t-\tau_{ij}^{(s)}) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}u_j(t) + \sum_{d=1}^{N_3}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}^{(d)}e_{3ij}^{(d)}u_j(t) = f_{1i}(\cdot) \qquad (i=1,2,\cdots,n), \tag{1}$$

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}^{(0)}x_j(t) + \sum_{k=1}^{N_4}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^{(k)}e_{4ij}^{(k)}x_j(t) = f_{2i}(\cdot) \qquad (i=1,2,\cdots,p), \tag*{(1)$_1$}$$

此处 a,b,c 是常量矩阵的元素;$\tau_{ij}^{(s)} > 0, i,j=1,2,\cdots,n;\ s=1,2,\cdots,N_2$。

(1) 也可重新记为

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}u_j(t) + \sum_{j=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{N_1} a_{1ij}^{(r)}e_{1ij}^{(r)} + \sum_{s=1}^{N_2} a_{2ij}^{(s)}e_{2ij}^{(s)}\Big]x_j(t) + \sum_{j=1}^{N_2}\sum_{j=1}^{n} a_{2ij}^{(s)}e_{2ij}^{(s)}[x_j(t-\tau_{ij}^{(s)}) - x_j(t)] + \sum_{d=1}^{N_3}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}^{(d)}e_{3ij}^{(d)}u_j(t) \qquad (i=1,2,\cdots,n), \tag{2}$$

当滞后 $\tau_{ij}^{(s)} \equiv 0 (i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m;s=1,2,\cdots,N_2)$ 时,(1) 化为无滞后的线性定常结构控制系统

$$\dot{X}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}u_j(t) + \sum_{j=1}^{n}\Big[\sum_{r=1}^{N_1} a_{1ij}^{(r)}e_{1ij}^{(r)} + \sum_{s=1}^{N_2} a_{2ij}^{(s)}e_{2ij}^{(s)}\Big]x_j(t) +$$

* 国家自然科学基金资助课题
收稿日期:1995-11-27

$$\sum_{d=1}^{N_3}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}^{(d)} e_{3ij}^{(d)} u_j(t) \qquad (i=1,2,\cdots,n), \tag{3}$$

$$y_i(t)=\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{(0)} x_j(t)+\sum_{h=1}^{N_4}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{(h)} e_{4ij}^{(h)} x_j(t) \qquad (i=1,2,\cdots,p)。 \tag{3$_1$}$$

定义 1 当下列条件成立时，我们称 $\bar{E}_1^{(r)}=(\bar{e}_{1ij}^{(r)})_{n\times n},\bar{E}_2^{(s)}=(\bar{e}_{2ij}^{(s)})_{n\times n},\bar{E}_3^{(d)}=(\bar{e}_{3ij}^{(d)})_{n\times m},\bar{E}_4^{(h)}=(\bar{e}_{4ij}^{(h)})_{n\times n}$，为多组多滞后控制系统(1)相应的基本关联矩阵：

假设 $\bar{e}_{1ij}^{(r)}=\begin{cases}1, x_j(t)\text{ 在 } f_{1i}\text{ 中出现}\\ 0, x_j(t)\text{ 不在 } f_{1i}\text{ 中出现；}\end{cases}$ $\quad \bar{e}_{2ij}^{(s)}=\begin{cases}1, x_j(t-\tau_{ij}^{(s)})\text{ 在 } f_{1i}\text{ 中出现}\\ 0, x_j(t-\tau_{ij}^{(s)})\text{ 不在 } f_{1i}\text{ 中出现；}\end{cases}$

$$\bar{e}_{3ij}^{(d)}=\begin{cases}1, u_j(t)\text{ 在 } f_{1i}\text{ 中出现}\\ 0, u_j(t)\text{ 不在 } f_{1i}\text{ 中出现；}\end{cases} \quad \bar{e}_{4ij}^{(h)}=\begin{cases}1, x_j(t)\text{ 在 } f_{2i}\text{ 中出现}\\ 0, x_j(t)\text{ 不在 } f_{2i}\text{ 中出现。}\end{cases} \tag{4}$$

定义 2 在基本关联矩阵 $\bar{E}_\beta^{(\alpha)}(\alpha=r,s,d,h;\beta=1,2,3,4)$ 中，若 $\bar{e}_{\beta ij}^{(\alpha)}=0$，取 $e_{\beta ij}^{(\alpha)}=0$，若 $\bar{e}_{\beta ij}^{(\alpha)}=1$，或取部分 $e_{\beta ij}^{(\alpha)}=0$，或取部分 $e_{\beta ij}^{(\alpha)}=1$，$(\beta=1,2,3,4)$ 则称关联矩阵 $E_\beta^{(\alpha)}$ 是由基本关联矩阵 $\bar{E}_\beta^{(\alpha)}$ 产生的。即有 $E_1^{(r)}\in\bar{E}_1^{(r)},E_2^{(s)}\in\bar{E}_2^{(s)},E_3^{(d)}\in\bar{E}_3^{(d)},E_4^{(h)}\in\bar{E}_4^{(h)}$。

定义 3 对滞后 $\tau_{\alpha ij}^{(s)}\geqslant 0(s=1,2,\cdots,N;\alpha=1,2,3)$ 及关联矩阵 $E_\beta^{(\alpha)}\in\bar{E}_\beta^{(\alpha)}$，如多组多滞后线性定常关联控制系统(1)的闭环系统的零解渐近稳定，则称多组多滞后线性定常关联控制系统为关联镇定。

对多组多滞后线性定常关联控制系统(1)，如果我们不考虑它的扰动结构关联项及滞后扰动关联项。则(1)化为无滞后无结构扰动参数的线性定常控制系统。

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), \tag{5}$$

$$y(t)=Cx(t), \tag{5$_1$}$$

假定(A,B)可控，(A,C)可观测，对(5)存在使二次性能指标

$$J=\int_{t_0}^{\infty}[x^T(t)Qx(t)+V^T(t)Ru(t)]\mathrm{d}t。 \tag{6}$$

取极小值的最优负反馈向量函数 $\quad u(t)=-kx(t)$， (7)

并且使得线性定常控制系统(5)的闭环系统 $\quad \dot{x}(t)=(A-Bk)x(t)$， (8)

的零解是渐近稳定的，这里 $\quad k=R^{-1}B^TP$， (9)

P 是 Riccati 矩阵代数非线性方程 $\quad A^TP+PA-PBR^{-1}B^TP+Q=0$ (10)

的唯一对称正定解。$Q=C^Te$，R 分别是 $n\times n$ 维和 $m\times m$ 维的正定对称矩阵。由正定对称矩阵 P，我们构造二次函数 $\quad V(x(t))=x^T(t)Px(t)$。 (11)

由于 $V(x)$ 是正定对称二次型函数，存在正数 $\rho_1>0,\rho_2>0$，并有

$$\beta_1x^T(t)x(t)\leqslant V(x(t))\leqslant\beta_2x^T(t)x(t)。 \tag{12}$$

由(11)式的 $V(x)$ 沿着线性定常控制系统(5)的轨线对 t 求导数，得到

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}|(2.5)=x^T(t)(-Q-PBR^{-1}B^TP)x(t)。 \tag{13}$$

因为$Q+PBR^{-1}B^TP$ 是正定对称矩阵，$x^T(t)(Q+PBR^{-1}B^TP)x(t)$ 是正定二次型函数，存在最大，最小特征值 β_4、β_3 得到 $\beta_3x^T(t)x(t)\leqslant x^T(t)(Q+PBR^{-1}B^TP)x(t)\leqslant\beta_4x^T(t)x(t)$， (14)

因此，由(13)式，得到$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}|_{(2.5)}\leqslant-\beta_3x^T(t)x(t)<0$。 (15)

令 $\max[|a_{ij}|,|a_{1ij}^{(r)}|,|a_{2ij}^{(s)}|,i,j=1,2,\cdots,n;r=1,2,\cdots,N_1;s=1,2,\cdots,N_2]=a$

$\max[|b_{ij}|,|b_{ij}^{(d)}|,i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m;d=1,2,\cdots,N_3]=b$

$\max[|a_{ij}^{(r)}|,|a_{ij}^{(s)}|,i,j=1,2,\cdots,n;r=1,2,\cdots N_1;s=1,2,\cdots,N_2]=a_1$

$\max[|b_{ij}^{(d)}|,i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m;d=1,2,\cdots,N_3]=b_1$

$\max[|P_{ij}|,i=1,2,\cdots,n]=P_1;\quad \max[|K_{ij}|,i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots n]=k_1;$

$\max[|\tau_{ij}^{(s)}|,i,j=1,2,\cdots,n]=\tau;\quad \max[a_1,b_1],i,j=1,2,\cdots,n]=D_1$。 (16)

引理 1[3] $|x_j(t-\tau_{ij})-x_j(t)|=|\int_{t-\tau_{ij}}^{t}[\frac{d}{\mathrm{d}t}x_j(t)]\mathrm{d}t|\leqslant\tau|\dot{x}_j(t'_j)|$

$$\leqslant \tau\{(a + bk_1m)\sum_{j=1}^{n}|x_j(t'_k)| + b_1k_1N_3m\sum_{j=1}^{n}|x_j(t'_k)| + a_1N_1\sum_{j=1}^{n}|x_j(t'_k)| + a_1\sum_{s=1}^{N_2}\sum_{j=1}^{n}|x(t'_k - \tau_{ij}^{(s)})|\}。\tag{17}$$

引理2 如果点$(x_1(t'_k - \tau_{k1}),\cdots,x_n(t'_k - \tau_{kn}))$在$4V(x_1(t),\cdots,x_n(t))$中，则有$V(x_1(t'_k - \tau_{k1}),\cdots,x_n(t'_k - \tau_{kn}))\leqslant 4V(x_1(t),\cdots,x_n(t))$，由(12)得到$\sum_{j=1}^{n}X_j^2(t'_k - \tau_{kj})\leqslant\frac{4\beta_2}{\beta_1}\sum_{j=1}^{n}x_j^2(t)$ (18)

同理有 $$\sum_{j=1}^{n}x_j^2(t'_k)\leqslant\frac{4\beta_2}{\beta_1}\sum_{j=1}^{n}x_j^2(t)。\tag{19}$$

2 主要结果

由于将多组多滞后线性定常关联控制系统(1)写成形式(2)。在(2)中的第一部分是没有滞后及没有扰动结构参数的(5)式，并将(2)中其余第二部分含有扰动结构参数。当没有扰动时，即$a_1 = 0, b_1 = 0$及滞后$\tau = 0$时，第二部分恒为零，即(2～5)式。因此，当扰动结构参数a_1, b_1比较小，滞后也较小时，将第二部分视为扰动项，所以，将(5)的最优负反馈向量函数视为多组多滞后线性定常关联控制系统(1)，(2)的次优负反馈向量函数；并将由(5)式构造的二次型李雅普诺夫函数视为(1)，(2)的二次型正定对称函数。从而得到：

定理1 假定(A,B)是可控的，(A,C)是可观测的，存在正数$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$使当

$$0\leqslant D < \varepsilon_1\Delta_1, 0\leqslant\tau < \varepsilon_2\Delta_1, (\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1)\tag{20}$$

时，对所有关联矩阵$E_g^{(i)}\in\bar{E}_g^{(i)}$，无滞后无扰动结构参数的线性定常控制系统(5)的闭环系统的渐近稳定性，蕴含了多组多滞后线性定常关联控制系统(1)的闭环系统的关联渐近稳定性。此处Δ_1, Δ_2为

$$\Delta_1 = \frac{\beta_3}{3p_1n^2(1 + 4\beta_2/\beta_1)(N_1 + N_2 + k_1mN_3)},\tag{21}$$

$$\Delta_2 = \frac{\beta_3}{3ap_1n^3N^2(1 + 4\beta_2/\beta_1)[a(1 + N_1) + bk_1m(1 + N_3)]}。\tag{22}$$

证明 由(11)的$V(x(t))$沿多组多滞后线性定常关联控制系统(1)的轨线，对t求导数，得到

$$\dot{V}_{(1)} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt}|_{(1)} = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}P_{il}|x_i(t)|\{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{m}b_{ij}u_j(t) + \sum_{r=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{n}a_{1ij}^{(r)}e_{1ij}^{(r)}x_j(t) + \sum_{s=1}^{N_2}\sum_{j=1}^{n}a_{2ij}^{(s)}e_{2ij}^{(s)}x_j(t - \tau_{ij}^{(s)} - x_j(t)) + \sum_{d=1}^{N_3}\sum_{j=1}^{m}b_{ij}^{(d)}e_{3ij}^{(d)}u_j(t)\}。$$

将(7)代入上式中，得到

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(1)} = {}& 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}P_{il}x_i(t)\{\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} - \sum_{f=1}^{n}b_{if}k_{fj})x_j(t) + \sum_{r=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{n}a_{1ij}^{(r)}e_{1ij}^{(r)}\cdot x_j(t) + \\ & \sum_{s=1}^{N_2}\sum_{j=1}^{n}a_{2ij}^{(s)}e_{2ij}^{(s)}x_j(t) + \sum_{s=1}^{N_2}\sum_{j=1}^{n}a_{2ij}^{(s)}e_{2ij}^{(s)}(x_j(t - \tau_{ij}^{(s)} - x_j(t)) - \sum_{d=1}^{N_3}\sum_{j=1}^{n}\sum_{f=1}^{m}b_{if}^{(d)}e_{3ij}^{(d)}k_{fj}x_j(t)\} \\ \leqslant{}& \dot{V}_{(5)} + 2p_1n\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|[a_1(N_1 + N_2)\sum_{j=1}^{n}|x_j(t)| + b_1N_3k_1m\sum_{j=1}^{n}|x_j(t)| + \\ & a\sum_{s=1}^{N_2}\sum_{j=1}^{n}|x_j(t - \tau_{ij}^{(s)}) - x_j(t)|] \\ \leqslant{}& \dot{V}_{(5)} + 2p_1n\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|\{D(N_1 + N_2 + N_3k_1m)\sum_{j=1}^{n}|x_j(t)| + a\sum_{s=1}^{N_2}\sum_{j=1}^{n}|x_j(t - \tau_{ij}^{(s)} - x_j(t)|\} \\ \leqslant{}& \dot{V}_{(5)} + Dp_1n(N_1 + N_2 + N_3k_1m)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i^2(t) - x_j^2(t'_k)) + \tau P_1n^2N_2a[a(1 + N_1) + bk_1m(1 \\ & + N_3)]\sum_{s=1}^{N_2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[x_i^2(t) + x_j^2(t_k^1 - \tau_{kj}^{(s)})]\end{aligned}$$

$$\leqslant \dot{V}_{(5)} + Dp_1n^2(N_1+N_2+N_3k_1m)(1+4\beta_2/\beta_1)\sum_{j=1}^{n}x_j^2(t) + \tau a p_1 n^3 N_2^2(1+4\beta_2/\beta_1)[a(1+N_1)+$$

$$bk_1m(1+N_3)]\sum_{j=1}^{n}x_j^2(t) < 0。$$

当
$$0 \leqslant D < \frac{\varepsilon_2\beta_3}{p_1n^2(N_1+N_2+N_3k_1m)(1+4\beta_2/\beta_1)}, \tag{23}$$

$$\tau < \frac{\varepsilon_2\beta_3}{ap_1n^3N_2^2(1+4\beta_2/\beta_1)[a(1+N_1)+bk_1m(1-N_3)]} \tag{24}$$

成立时，对结构矩阵 $E_\beta^{(q)} \in \overline{E}_\beta^{(j)}$，从而得到多组多滞后线性定常关联控制系统(1)的闭环系统是结构渐近稳定的，即(1)为关联镇定。

定理2 如果线性定常控制系统(5)的闭环系统(8)的零解是渐近稳定的，存在 $\Delta_1>0, \Delta_2>0, \varepsilon_1, \varepsilon_2>0, (\varepsilon_1+\varepsilon_2=1)$ 对所有结构关联矩阵 $E_\beta^{(j)} \in \overline{E}_\beta^{(j)}$ 及 $0 \leqslant D < \varepsilon_1\Delta_1, 0 \leqslant \tau < \varepsilon_2 < \Delta_2$ 成立时，多组多滞后线性定常关联控制系统(1)的闭环系统的零解是关联渐近稳定的，即系统(1)关联镇定。

证明可类似于定理1，从略。

3 讨 论

为叙述方便，先引出文献1中的相应定理。

定理3[1] 假定线性定常控制系统(5)的闭环系统(8)零解是渐近稳定的，则一定存在常数 $\Delta_3>0$，与 $\Delta_4>0$，对所有结构关联矩阵 $E_\beta^q \in \overline{E}_\beta^q$ 及 $0 \leqslant \tau_1 < \Delta_3, 0 \leqslant \tau_2 < \Delta_4$ (25)

时，多组多滞后的线性定常关联控制系统(1)的闭环系统的零解是渐近稳定的。这里

$$\Delta_3 = \frac{1}{3}\Delta_1, \Delta_4 = \frac{1}{3}\Delta_2。 \tag{26}$$

在定理3中，(τ_1,τ_2) 的变化区域是附图中的长方形区域 D_2(附图中的阴影部分)，即

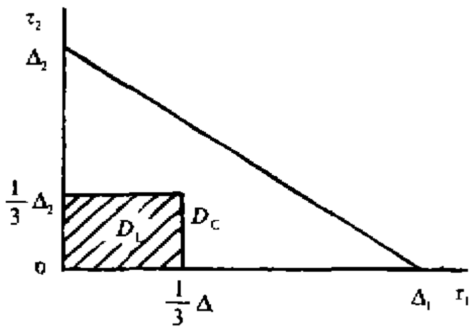
$$D_L = \{(\tau_1,\tau_2); 0 \leqslant \tau_1 < \frac{1}{3}\Delta_1, 0 \leqslant \tau_2 < \frac{1}{3}\Delta_2\}。 \tag{27}$$

而在定理2中，(τ_1,τ_2) 的变化区域是附图中的三角形 $O\Delta_1\Delta_2$ 区域 D_C，即 $D_c = \{(\tau_1,\tau_2); 0 \leqslant \tau_1 < \varepsilon_1\Delta_1, 0 \leqslant \tau_2 < \varepsilon_2\Delta_2, \varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 < 0; \varepsilon_1+\varepsilon_2=1\}$。 (28)

由于新旧两定理中的滞后 (τ_1,τ_2) 的镇定域的面积(相应区域的面积仍分别记为 D_C, D_L)之比 ρ 为

$$\rho = \frac{D_c}{D_L} = \frac{1/2\Delta_1\Delta_2}{(1/2)^2\Delta_1\Delta_2} = \frac{9}{2} = 4.5, \tag{29}$$

因此，由我们给出的定理2的滞后 (τ_1,τ_2) 镇定域已扩大为文献1中相应定理(即定理 A)的4.5倍。



附图 (τ_1,τ_2) 的变化区域图

App Fig. the waring domain of (τ_1,τ_2)

参 考 文 献

1 Liu Yonqing, Zhang Xinzheng. The structure and interconnected stabilization of linear constant interconnected control systems with multigroups and multidelays. Advances in Modelling & analysis. C. 1994,40(1):17~26

2 Yang Huizhong, Liu Yongqing. The Interconnected Stabilization of Linear Control Systems with Multidelays (2). Proceedings Znfern. Paris: AMSE Conference. Signals & Systems, 1989, 3:143~150; 151~159

3 刘永清,宋中昆. 大型动力系统的理论与应用. 第一卷. 广州:华南理工大学出版社,1988

4 刘永清,徐维鼎. 大型动力系统的理论与应用. 第二卷. 广州:华南理工大学出版社,1989

责任编辑 张素敏

The Enlargement of the Structure and Interconnected Stabilization of Linear Costant Interconnected Control Systems with Multigroups and Multidelays

Zhang Xinzheng[1)] Shang Lijun[2)]

(1)Department of Automation South-China University of Technology, 510641, Guangzhou;

2) Department of Mathematics, The Forth Military Medical University, 710032, Xi'an)

Absstact The sufficient condition of interconnect asymptotically stabilization of closed-loop system of constant intercomected linear Control system with multigroups and multidelays are given from the asymptotically stabilization of closed-loop system of constant linear control system without delay and perturbation structure parametric. Thus the delay stabilization range is greatly extended.

Key word *the linear constant interconnected control systems with multigroups and multidelays; the structure and interconnected stabilization; the delay stabilization range*

· 书 评 ·

东方古算 重放异彩
——评介李继闵《九章算术校证》

继《东方数学典籍〈九章算术〉及其刘徽注研究》出版后，陕西科学技术出版社又出版了李继闵先生的《九章算术校证》一书，这是近年来陕西科技出版社为整理出版东方数学经典所做的一项重要工作。

《九章算术》是我国古代最重要的数学经典，是我国西汉中期(公元前1世纪)辑为定本的一部不朽的算学典籍。它作为世界古典数学名著，与古希腊欧几里得《几何原本》东西辉映，成为人类文明史上极其珍贵的科学文化遗产。

《九章算术》一书是由246个数学问题及其答案和术文组成，按算法分属方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股等9章。其内容丰富而且实用性强，具有以算为主，数形结合的特点。它的基本结构是：以题解为中心，在题解中给出算法，根据算法组建理论体系。所以说，以《九章算术》为代表的中国数学体系是以题解为中心的算法体系。

《九章年术》自汉代成书之后，有许多人为其作注，其中最著名的当推公元263年曹魏大数学家刘徽的注，刘徽提出许多数学定义，用演绎逻辑对《九章算术》中的解法、公式进行了全面的证明，创造了包括用极限思想证明圆面积公式和四面体体积公式在内的若干新方法，理论贡献尤为卓著。其后，南朝祖冲之，唐李淳风，北宋贾宪，南宋杨辉等都对《九章算术》做过注释和研究，并各自有所贡献。清代中叶戴震从《永乐大典》中辑录出《九章算术》，先后整理校订了3种版本，其后，由于抄录、排印、翻刻的粗细，又形成了十几个各有歧异的版本，但其内容大都源于戴本。戴震之后，李潢等众多清代学者都曾为《九章算术》的校勘耗费心血，尤其李潢以孔刻本重新校算而刊刻的《九章算术细草图说》多次被后人翻刻，影响较大。本世纪60年代，现代数学史家钱宝琮校点《算经十书》，对《九章算术》的校勘做出了很大的贡献，纠正了戴校本的若干重大错误，倡导恢复《九章算术》古本的原貌。中国科学院自然科学史研究所研究员郭书春先生的《九章算术》汇校本，对《九章算术》的重新整理是一个重要的贡献。

在清代众多的学者对《九章算术》的整理中，以戴震的工作最有影响，他提出的校勘条数最多，而且正确率也比较高，“戴震校正的文字，颠扑不破的果然不少”(钱宝琮语)。李潢提出的校勘条目虽然不多，但其正确率最高，原因在于他对《九章算术》算理比戴氏有更为深入的研究。现代学者钱宝琮等对《九章算术》的校勘是在一个新的基础上进行的，一方面，经过清代学者的反复校订之后，《九章算术》中的异文多半是长期难解之疑案，另一方面，现代数学已全盘西化，与传统的中国古算早已隔绝，在这样的条件下