④ 383-385

非齐次超双曲型方程的特征问题*

O175.27

高 帆

(西安石油学院基础部,710061,西安;33岁,男,讲师)

A **摘 要** 证明了一类非齐次超双曲型方程特征问题解的存在性及唯一性。

关键词 超双曲型方程;特征问题;基本公式;基本解;中量 解,存在性.

分类号 O175.27

在文献1中已建立了方程 $\sum_{i=1}^{p} u_{x_i x_i} - \sum_{j=1}^{q} u_{y_j y_j} = h(x,y)$ 的正规解应满足的广义 Asgeirsson 中量定理,本文将用其结果讨论该类方程的特征问题,并始终假定 $p>q\geqslant 2$。

今考虑问题

$$\begin{cases} F(u) \equiv \sum_{i=1}^{p} u_{x_i x_i} - \sum_{j=1}^{q} u_{y_j y_j} = h(x,y)(\|x\| < \|y\|), \\ u|_{\|x\|=\|y\|} = 0,\ (p > q \geqslant 2)。\end{cases} \tag{1}$$

此处 $x=(x_1,\cdots,x_p)\in R^p, y=(y_1,\cdots,y_q)\in R^q$. $\|x\| = [\sum_{i=1}^{p} x_i^2]^{\frac{1}{2}}, \|y\| = [\sum_{j=1}^{q} y_j^2]^{\frac{1}{2}}$。对 $h(x,y)$ 要求将随讨论过程给出。

今在 $y_1,\cdots,y_q$ 后再虚设变元 $y_{q+1},\cdots,y_p$,由文献1中(12)式即得

$$f(z;x_0,y_0) - g(z;x_0,y_0) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} 2^{-2\alpha-1} z^{2-2\alpha} \frac{d^\alpha}{dr^\alpha}[r^{2\alpha-1} \cdot p(\frac{\sqrt{r}}{2})]|_{r=z^2} \tag{2}$$

其中 $\alpha = \frac{1}{2}(p-1)$,

$$f(z,x_0,y_0) = C_p \iint\limits_{\Omega_\alpha^{(p)}} u(x_1^0 + z\alpha_1,\cdots,x_p^0 + z^\alpha p, y_1^0,\cdots,y_q^0) d\Omega_\alpha^{(p)}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} g(z;x_0,y_0) &= C_p \iint\limits_{\Omega_\beta^{(p)}} u(x_1^0,\cdots,x_p^0, y_1^0 + z\beta_1,\cdots,y_q^0 + z\beta_q) d\Omega_\beta^{(p)} \\ &= C_p \cdot C_{p-q} \cdot z^{2-p} \iiint\limits_{\|y\|\leqslant z} u(x_0, y_0 + y)(z^2 - \|y\|^2)^{\frac{p-q}{2}-1} dy_1\cdots dy_q, \end{aligned} \tag{4}$$

$$p(\frac{\sqrt{r}}{2}) = \frac{1}{2} \iint\limits_{D_{\sqrt{r}}} W(\frac{\sqrt{r}}{2},\frac{\sqrt{r}}{2};\xi,\eta) \cdot h_1(\xi,\eta;x_0,y_0) d\xi d\eta, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} W(\frac{\sqrt{r}}{2},\frac{\sqrt{r}}{2};\xi,\eta) &= 4r^{-(p-2)}\xi\eta[r-(\xi-\eta)^2]^{(p-3)/2} \cdot (\xi+\eta)^{p-3} \\ &\times F(\frac{3-p}{2},\frac{3-p}{2},1;\frac{[r-(\xi+\eta^2)](\xi-\eta)^2}{[r-(\xi-\eta)^2](\xi+\eta)^2}), \end{aligned} \tag{6}$$

$$h_1(\xi,\eta;x_0,y_0) = \iint\limits_{\Omega_\alpha^{(p)}} \iint\limits_{\Omega_\beta^{(p)}} h(x_1^0 + \xi\alpha_1,\cdots,x_p^0 - \xi\alpha_p, y_1^0 + \eta\beta_1,\cdots,y_q^0 + \eta\beta_q) d\Omega_\alpha^{(p)} \cdot d\Omega_\beta^{(p)}$$

---

* 收稿日期:1995-04-08

$$= C_{p-q}\eta^{2-p}\iint\limits_{\Omega_a^{(p)}}\iiint\limits_{\|y\|\leq\eta} h(x_0+\xi\alpha;y_1^0+y_1,\cdots,y_q^0+y_q)(\eta^2-\|y\|^2)^{\frac{p-q}{2}-1}\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_q\mathrm{d}\Omega_a^{(p)}, \tag{7}$$

其中 $\Omega_a^{(p)}$,$\Omega_\beta^{(p)}$ 均表示 R^p 中单位球面,C_p 是其面积。$D_{\sqrt{r}}$ 乃由 $\xi=0$,$\eta=0$,$\xi+\eta=\sqrt{r}$ 所围区域。

先假定 $u(x,y)$是问题(1)的正规解,并取 $x_0=(0,\cdots,0)\in R^p$,$y_0=z\tau\in R^q$,其中 $z=\|y_0\|$,$\tau=(\tau_1,\cdots,\tau_q)\in R^q$,即 $\|\tau\|=1$。

注意到(1)式的特征数据,代入(2)式即

$$\iiint\limits_{\|y\|\leq z} u(0,y_0+y)(z^2-\|y\|^2)^{\frac{p-q}{2}-1}\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_q$$

$$= -\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot 2^{1-2a}}{\Gamma(a+\frac{1}{2})C_p\cdot C_{p-q}}\cdot z\cdot\frac{\mathrm{d}^a}{\mathrm{d}r^a}[r^{2a-1}p(\frac{\sqrt{r}}{2})]|_{r=z^2}\equiv\varphi(y_0), \tag{8}$$

其中令

$$\varphi(y_0)\equiv\varphi(z\tau_1,\cdots,z\tau_q)=-\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot 2^{1-2a}}{\Gamma(a+\frac{1}{2})C_p\cdot C_{p-q}}\cdot z\cdot\frac{\mathrm{d}^a}{\mathrm{d}r^a}[r^{2a-1}p(\frac{\sqrt{r}}{2})]|_{r=z^2},$$

由于 $p(\frac{\sqrt{r}}{2})$仍是$(x_0,y_0)\equiv(0,\cdots,0,z\tau_1,\cdots,z\tau_q)$的函数。

这样如果 $u(x,y)$是问题(1)之正规解,$u(0,y)$必满足积分方程(8)式。

当 $p>q\geqslant 2$ 时,$(p-q)/2\geqslant\frac{1}{2}$,由文献 2,下按两种情况讨论(8)式的解:

当$(p-q)/2=n+1$(n 是非负整数),对(8)式两端求偏导数 $\partial^{n+1}/\partial z^{n+1}$,由文献 2 得

$$\frac{1}{2z}\iint\limits_{\|y\|^2=2z(y,\tau)} u(0,y)\|y\|^{2(n+1)}\mathrm{d}S_y=\frac{z^{n+1}}{n!}\cdot\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n-1}}[\varphi(z\tau_1,\cdots,z\tau_q)]。 \tag{9}$$

令 $x=2z\tau\in R^q$,并记

$$K(x)=\frac{z^{n+1}}{n!}\cdot\frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}}[\varphi(z\tau_1,\cdots,z\tau_q)]|_{z=\frac{1}{2}\|x\|},$$

(9)式即为 $\frac{1}{\|x\|}\iint\limits_{\|y\|^2=(x,y)} u(0,y)\|y\|^{p-2}/\|y\|^{q-2}\mathrm{d}S_y=K(x)$。

今对(1)式中 $h(x,y)\equiv h(x_1,\cdots,x_p,y_1,\cdots,y_q)$提出要求,使 $k(x)$有$(q+1)$阶连续偏导数,且存在常数 $A>0$ 使任意,$x\in R^q$ 都有

$$\left|\frac{\partial^k k(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_q^{\alpha_q}}\right|\leqslant\frac{A}{1+\|x\|^{3(q+1)/2}}(0\leqslant\sum_{i=1}^q\alpha_i=k\leqslant n+1)。$$

由文献 3,方程(8)式便存在除原点外,处处有二阶偏导数的唯一解,

$$u(0,y)=\frac{(-1)^{(q-1)/2}}{(2\pi)^{q-1}\|y\|^{p-2}}\iint\limits_{(x,y)=\|y\|^2} K(x)\mathrm{d}S_x。 \tag{10}$$

这是 q 取奇数的结果,q 取偶数时,见文献 3。

当$(p-q)/2=n+\frac{1}{2}$(n 是非负整数),对(8)式求偏导数 $\partial^n/\partial z^n$,由文献2得

$$(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots\frac{1}{2}\iiint\limits_{\|y\|^2\leqslant 2z(y,\tau)} u(0,y)[2z(y,\tau)-\|y\|^2]^{-\frac{1}{2}}[2(y,\tau)]^n\mathrm{d}y=\frac{\partial^n}{\partial z^n}[\varphi(z\tau_1,\cdots,z\tau_q)]。$$

从而

$$\int_0^s(s-z)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}z\iiint\limits_{\|y\|^2\leqslant 2z(y,\tau)} u(0,y)[2z(y,\tau)-\|y\|^2]^{-\frac{1}{2}}[2(y,\tau)]^n\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots(n-\frac{1}{2})}\int_0^s(s-z)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\partial^n}{\partial z^n}[\varphi(z\tau_1,\cdots,Z\tau_q)]\mathrm{d}z, \tag{11}$$

上式左端即

$$\pi \iiint\limits_{|y|^2 \leqslant 2(y,\tau)} u(0,y)[2(y,\tau)]^{n-\frac{1}{2}} \mathrm{d}y,$$

对(11)式两端再求偏导数$\frac{\partial}{\partial s}$，由文献 2 得

$$\frac{1}{2s} \iint\limits_{\|y\|^2 = 2S(y,\tau)} u(0,y)\|y\|^{2n+1} \mathrm{d}S_y = \frac{s^{n-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots (n - \frac{1}{2})\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left\{\int_0^s (s-z)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^n}{\partial z^n}[\varphi(z\tau_1, \cdots, z\tau_q)]\mathrm{d}z\right\}。 \tag{12}$$

令 $x = 2s\tau \in R^q$，并取

$$L(x) = \frac{s^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots (n - \frac{1}{2})\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left\{\int_0^s (s-z)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^n}{\partial z^n}[\varphi(z\tau_1, \cdots, z\tau_q)]\mathrm{d}z\right\}\Big|_{s=\frac{|x|}{2}}。$$

今对 $h(x,y) \equiv h(x_1,\cdots,x_p,y_1,\cdots,y_q)$ 提出要求，使 $L(x)$ 有$(q+1)$阶连续偏导数，且存在常数 $B > 0$，使对任意 $x \in R^q$ 有

$$\left|\frac{\partial^k L(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_q^{\alpha_q}}\right| \leqslant \frac{B}{1 + \|x\|^{3(q+1)/2}} (0 \leqslant \sum_{i=1}^{q} \alpha_i = k \leqslant n+1)。$$

由文献 3，方程(8)式便存在除原点外，处处有二阶偏导数的唯一解，

$$u(0,y) = \frac{(-1)^{(q-1)/2}}{(2\pi)^{q-1}\|y\|^{p-2}} \iint\limits_{(x,y)=\|y\|^2} L(x)\mathrm{d}Sx, \tag{13}$$

这是 q 取奇数时的结果，q 取偶数时见文献3。

今对(10)、(13)式分别施行一次超 Lorentz 变换即得$\|x\|<\|y\|$时 $u(x,y)$之值。

由上述解过程得问题(1)的正规解是唯一的。

综上所述讨论结果及文献3，我们便证明了 $p \geqslant q \geqslant 2$时问题(1)的提法也是正确的。

参 考 文 献

1 高帆. 非齐次超双曲型方程解的中量定理. 纺织高校基础科学学报，1996(1)：17～22

2 高帆，张朋. 齐次超双曲型方程的特征问题. 纺织高校基础科学学报，1995(2)：132～136

3 布拉格维列辛斯基 A C. 超双曲型方程和波动方程数据给在特征锥上的某些问题. 苏联科学院报告：数学、物理类，1961(140)：990～993

责任编辑　张素敏

The Characteristic Problem of Nonhomogeneous Ultrahyperbolic Equation

Gao Fan

(Xi'an Petroleum Institute, 710061, Xi'an)

Abstract The exitence and untqueness of characteristic sotution are proved for a class of nonhomogeneous ultrahyperbolic equations by using generalized Asgeirsson mean value theorem.

Key words ultrahyperbolic equation; characteristic problem; identical formula; elementary solution; mean value