1995年4月
第25卷 第2期

Apr. 1995
Vol. 25 No. 2

① 

# 刘焯二次内插算法及其在唐代的历史演变*

95-188

95, 25(2)
95-100

O112
P1-092

纪志刚

(西北大学数学系,710069,西安太白北路1号;38岁,男,博士)

A
**摘 要** 遵循"古证复原"的原则,利用算理分析的方法阐明刘焯等间距二次内插算法的构建原理,揭示刘焯算法结构的程序性表现出中国古典数学机械化与构造特征;探讨刘焯二次内插算法从等间距到不等间距的演变历程。

**关键词** 内插法; 算法程序; 数学史

**分类号** O112

刘焯二次内插法、唐代,
天文学史

中国古代数理天文学的重要特点是利用代数方法处理天文观测数据,并不断地提高算法精度,其中内插算法起着重要作用。隋代之前,一般多用线性插值。约在公元600年左右,刘焯在皇极历中创立二次内插算法,并将其应用于计算太阳位置、定朔时刻、日月交食、五星运行等历法问题,从而开创了历法计算的新格局。

本文以"古算复原"思想为指导,探索刘焯二次插值算法的造术原理;继而考查刘焯算法在唐代历法中以等间距→不等间距→等间距的改进与演变过程。

## 1 刘焯二次内插算法与造术原理

北齐时张子信于海岛以浑仪测日达30余年,其"言日行在春分后则迟,秋分后则速"(见《隋书天文志》),并以算步其"差变之数",揭开了中国古代历法对太阳视运动不均匀性研究的新篇章。刘焯皇极历所制太阳视运动不均匀性改正数值表,即"日躔表"给出了24节气时太阳改正数据,但若推求太阳在两节气间任一时刻的位置,则需要使用插值算法,刘焯方法如下(见《隋书律历志·皇极历》):

> 推每日迟速数术见求所在气陟降率,并后气率,半之;以日限乘而泛总除,得气末率。又日限乘二率相减之残,泛总除,为总差。其总差亦日限乘而泛总除,为别差。率:前少者,以总差减末率,为初率,(乃)〔半〕别差加之;前多者,即以总差加末率,皆为气初日陟降数。以别差前多者日减,前少者日加初数,得每日数。所历推定气日,随算其数,陟加、降减其迟速,各为迟速数。

这是由某气迟速数 $f(nL)$、陟降率 $\Delta_1$ 和后一气陟降率 $\Delta_2$,求该气每日迟速数 $f(nL+t)$ 的问题($L$ 为一节气长度;$n=0,1,\cdots,11$;$t=1,2,\cdots,L$)。刘焯术文可用公式表述为:

$$f(nL+t)=f(nL)+\frac{t}{L}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{t}{L}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{t^2}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2)。\qquad (1)$$

鉴于刘焯公式在天文学史与数学史上的重要成就,其造术原理素为数学史家所重视。下面,我们将从术语内涵分析,算法结构的剖解,造术之源的探索3个方面入手,来揭示刘焯二次内插算法的构造原理根植在《九章算术》。其算法程序呈现出中国古典数学的机械化与构造性特色。

---

* 陕西省自然科学基金资助课题
收稿日期:1994-05-25

如图1,设$\Delta_1$,$\Delta_2$分别为所在气朓降率、后气率。术文"见求所在气朓降率,并后气率,半之;以日限乘而泛总除,得气末率。"其中"日限"为11,"泛总"系"盈泛"和"亏总"的合称。刘焯规定"秋分后春分前为盈泛(16)","春分后秋分前为亏总(17)",这样:

$$\text{秋分后春分前每气长度}\ L = \frac{\text{盈泛}(16\times 10)}{\text{日限}(11)} = 14.55\ \text{日};$$

$$\text{春分后秋分前每气长度}\ L = \frac{\text{亏总}(17\times 10)}{\text{日限}(11)} = 15.45(\text{日})。$$

因此,
$$\text{气末率} = \frac{\text{日限}}{\text{泛总}}\cdot\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} = \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}$$

图1中几何量$CD$表示"气末率"。

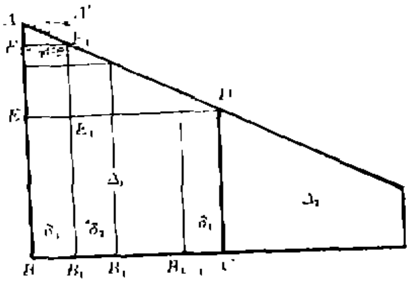

图1　刘焯二次内插算法造术的几何解释

术文"又日限乘二率相减之残,泛总除,为总差"。即

$$\text{总差} = \frac{\text{日限}}{\text{泛总}}\cdot(\Delta_1-\Delta_2) = \frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}$$

图1中几何量$AE$表示"总差"。

术文"其总差亦日限乘而泛总除,为别差"。即

$$\text{别差} = \frac{\text{日限}}{\text{泛总}}\cdot\text{总差} = \frac{\Delta_1-\Delta_2}{L^2}$$

图1中几何量$AF$表示"别差"。

术文"率:前少者,以总差减末率,为初率,(乃)〔半〕别差加之;前多者,即以总差加末率,皆为气初日朓降数。""前少"指$\Delta_1<\Delta_2$,"前多"为$\Delta_1>\Delta_2$,图1所示为"前多"。依术文"前少"时初率为:

$$\text{初率} = \text{末率} - \text{总差} = \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L} - \frac{\Delta_1-\Delta_2}{L} \qquad (\Delta_1<\Delta_2)$$

"前多"时初率为:

$$\text{初率} = \text{末率} + \text{总差} = \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L} + \frac{\Delta_1-\Delta_2}{L} \qquad (\Delta_1>\Delta_2)$$

在图1中,几何量$AB$表示"前多"时"初率"。

注意到一气中每一日间隔为1,即　$BB_1 = B_1B_2 = \cdots = B_{L-1}C = 1$

气末率、总差、别差、初率亦可表示为矩形的面积:

$$\text{气末率} = \square B_{L-1}D,\quad \text{总差} = \square AE_1,\ \text{别差} = \square AF_1,\quad \text{初率} = \square AB_1,$$

因此,小梯形$\triangle AB_1$的面积为$\delta_1 = \triangle AB_1 = \square AB_1 - \frac{1}{2}\square AF_1$　　$(\Delta_1>\Delta_2)$

或者,在"前少"时$\delta_1 = \triangle AB_1 = \square AB_1 + \frac{1}{2}\square AF_1$　　$(\Delta_1<\Delta_2)$

此即术文"…为初率,(乃)〔半〕别差加之,…,皆为初日朓降数。"

关于"初率"的计算,有两点说明:

其一,原文"乃别差加之",严敦杰[1]、李俨[2]均视为衍文而删。若删此5字,则出现"…为初率,…皆为气初日朓降数"实同名异的句式。在刘焯算法中,后一术名总是由前一术名进行一次新的运算而产生。"乃别差加之"系说明如何由"初率"求得"气初日朓降数"。"乃"字应是"半"字之误。

其二,从术文中对"前少"时初日朓降数的计算(初率+半别差),推知"前多者,即以总差加末率"之后亦应有"半别差减之",这样方与下句"皆为气初日朓降数"之"皆"相呼应。但从此段术文阐述的整体性来看,可视为承上而省,故不补。

刘焯认为太阳在一气内每日的改变量("别差")是相等的。因此,只要在"初日朓降数"中累次加减"别差",就可求得每日朓降数$\delta_i$;如术文"以别差前多者日减,前少者日加初数,得每日数。"即有(以下推算为"前多"的情形,"前少"者类此):

$$\delta_1 = \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L} + \frac{\Delta_1-\Delta_2}{L} - \frac{\Delta_1-\Delta_2}{2L^2}$$

$$\delta_2 = \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L} + \frac{\Delta_1-\Delta_2}{L} - \frac{3}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

$$\delta_3=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{5}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

……

一般地 $\delta_t=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{2t-1}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2) \qquad (t=1,2,\cdots,L)$。

最后,"所历推定气日,随算其数,胏加降减其迟速,各为迟速数。"术中"其迟速"即相应于本气的迟速数 $f(nL)$,关键是怎样理解"随算其数"。按,《广雅·释诂一》:"随,顺也",故"随"可作"顺次"解。因此,"随算其数"即顺次累计自本气初日到时刻 $t$ 之间的各日"胏降数":$\delta_1,\delta_1+\delta_2,\delta_1+\delta_2+\delta_3,\cdots,\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_t$,故有:

$$\delta_1=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2L^2},$$

$$\delta_1+\delta_2=2\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+2\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{4}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2),$$

$$\delta_1+\delta_2+\delta_3=3\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+3\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{9}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2),$$

……

$$\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_t=t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+t\frac{\Delta_2-\Delta_2}{L}-\frac{t^2}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2)。$$

可以验证,当 $t=L$ 时,$\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_L=\Delta_1$,即各日"胏降数"累计之和为本气"胏降率",这样,时刻 $t$ 的迟速数 $f(nL+t)$ 为

$$f(nL+t)=f(nL)+\sum_1^t\delta_i=f(nL)+\frac{t}{2L}(\Delta_1+\Delta_2)+\frac{t}{L}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{t^2}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

此即公式(1)。

刘焯二次内插算法的公式形式虽与Newton公式一致,但其构造思想却与其旨趣迥异。那么刘焯算法思想的源头何在呢?《九章算术》均输章"五尺金棰"术似能透露某种端倪。

"五尺金棰"问如下(见《九章算术·均输》):

今有金棰,长五尺,斩本一尺,重四斤,斩末一尺,重二斤。问次一尺各重几何?

术曰:令末重减本重,余即差率也。又置本重,以四间乘之,为下第一衰。副置,以差率减之,每尺各自为衰,副置下第一衰以为法,以本重四斤遍乘列衰,各自为实。实如法得一斤。

这个问题实质上是已知等差级数首项(本重)、末项(末重)及项数,求其各项。以术推演可得:

本重,本重 $-\frac{1}{4}$ 差率,本重 $-\frac{2}{4}$ 差率,本重 $-\frac{3}{4}$ 差率,本重—差率(= 末重)。

"五尺金棰"术与刘焯二次内插算法两者术名有如下相应关系:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 本重 | 差率 | $\frac{1}{4}$ 差率(即公差) | 末重 |
| 初数 | 总差 | 别差 | 末率 |

刘焯术文中在求得气末率、总差、别差及初数之后,其每日胏降数的推求即相当于"五尺金棰"术中求次一尺各重:

$$\delta_t=\underbrace{\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2L^2}}_{\text{本重}}-\frac{(t-1)}{L}\cdot\underbrace{\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}}_{\text{差率}}。$$

《隋书》"刘焯传"述其学术造诣时,云其"为学不倦,《九章算术》、《周髀》、《七曜》历书10余部,推步日月之法,量度山海之本,莫不覆其根本,穷其秘奥。…"(见《隋书列传四十、儒林"刘焯传"》),在此我们看到《九章算术》精邃算理对中国古代天算的深刻影响。

刘焯推求每日迟速数的算法,层次分明,环环相扣,构成了一个完整的算法程序。图4中我们仿照现代程序设计记号与图示将刘焯算法译成"程序框图",其算法设计的特点与构造脉络显明可见。中国古典

数学没有引入代数符号，它的算法完全由文字来叙述，这就需要算法的设计者有着高超的技巧，而这些算法恰好形成了中国古典数学机械化和构造性的特点。刘焯二次内插算法应用中精彩范例之一。

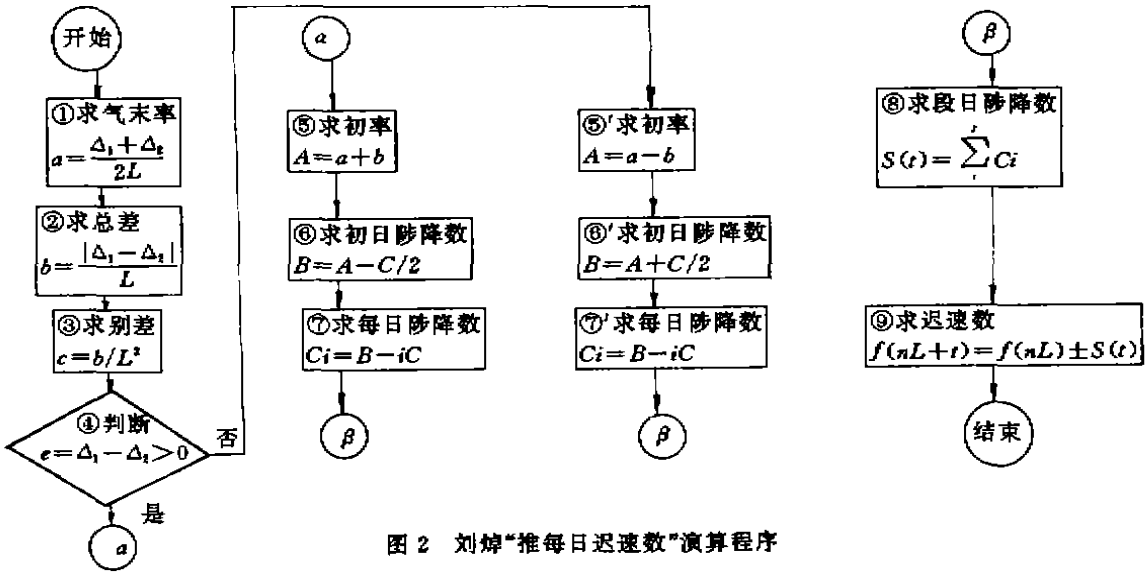


图 2　刘焯"推每日迟速数"演算程序

## 2　唐代历法对"日躔盈缩"算法的改进

李淳风麟德历(664A. D.)术宗刘焯，其"日躔盈缩"算法与刘焯方法基本一致，此不复述。一行制大衍历(728 A. D.)，改平气为定气，从而把刘焯等间距二次内插方法发展到不等间距，此举被誉为是"中国历法科学的一大进步"[3]。

一行"步日躔术"如下(见《旧唐书·历志三"大衍历"》)：

以所入气并后气盈缩分($\Delta_1+\Delta_2$)，倍六爻(12)乘之，综两气辰数($W_1+W_2$)除之，为末率。又列二气盈缩分，皆倍六爻乘之，各如辰数而一，以少减多，余为气差。至后以差加末率，分后以差减末率，为初率。倍气差，亦倍六爻乘之，复综两气辰数除，为日差。半之，以加减初末，各为定率。以日差至后以减，分后以加气初定率，为每日盈缩分。乃驯积之，随所入气日加减气下先后数，各其日定数。

大衍历规定：定气辰数($W_i$)＝12×定气长度($L_i$)，如术有：

$$末率=\frac{12(\Delta_1+\Delta_2)}{W_1+W_2}=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{L_1+L_2};\quad 气差=\frac{12\Delta_1}{W_1}-\frac{12\Delta_2}{W_2}=\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2};$$

$$日差=\frac{12\times 2气差}{W_1+W_2}=\frac{2}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right);$$

$$初率=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{L_1+L_2}\pm\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right),\quad \left(\begin{matrix}至后+\\分后-\end{matrix}\right)$$

$$定率=\underbrace{\frac{\Delta_1+\Delta_2}{L_1+L_2}}_{末率}\pm\underbrace{\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)}_{气差};\mp\underbrace{\frac{1}{2}\frac{2}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)}_{半日差}$$

下面，以"至以后"为例，说明术文中的"驯积"。据术文，其"每日盈缩分"$\delta_t$ 为

$$\delta_t=定率-(t-1)日差=初率-\frac{2t-1}{2}日差$$

$$=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{L_1+L_2}+\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}-\frac{2t-1}{2}\frac{2}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)\qquad (t=1,2,\cdots,L_1)$$

"驯积"即"累积"，即有 $\sum_{1}^{t}\delta_i=t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{L_1+L_2}+t\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)-\frac{t^2}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_2}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right)$

同理，"分以后"有 $\sum_{1}^{t}\delta_i = t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{L_1+L_2} - t(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}) + \frac{t^2}{L_1+L_2}(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2})$

最后，"其日定数"$f(L_1+t)$为

$$f(L_1+t) = f(L_1) + t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{L_1+L_2} + t(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}) - \frac{t^2}{L_1+L_2}(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_1}) \qquad (2_1)$$

$$f(L_1+t) = f(L_1) - t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{L_1+L_2} - t(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}) - \frac{t^2}{L_1+L_2}(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}) \qquad (2_2)$$

这一公式与现今不等间距二次内插公式完全相合。

为阐述一行公式的数学原理，我们考虑如下问题：

设 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 为等差数列的前 $n$ 项和，$\Delta_1=\sum_{1}^{n_1}a'_i$，$\Delta_2=\sum_{1}^{n_2}{}_{n}''$ 为其中两段不相交的连续和，求其各项。

显然，问题的关键是求其公差 $d$，《九章算术》"均输章"19 问"有竹九节"已就 $a'_1=a_1$，$a''_{n_2}=a_n$，$n_1<n_2$ 的情形给出了公差的求法。

其问如下（见《九章算术·均输"有竹九节"问》）：

今有竹九节，下三节容四升，上四节容三升，问中间二节欲均容各多少。

即设 $a_i(i=1,\cdots,9)$为一等差数列，且有 $\Delta_1=a_1+a_2+a_3=4$；　$\Delta_2=a_6+a_7+a_8+a_9=3$ 求 $a_i$，其术为：

以下三节分四升为下率，以上四节分三升为上率。上下率以少减多，余为实。置四节、三节各半之，以减九节，余为法。实如法得一升，即衰相去也。下率，一升少半升者，下第二节容也。

根据术文，可导出求公差的一般公式

$$d(\text{“衰相去”}) = \frac{\frac{\Delta_1}{n_1}-\frac{\Delta_2}{n_2}}{n-\frac{n_1+n_2}{2}} \qquad (3)$$

这样，大衍历中的"日差"，仅是"有竹九节"中 $n=n_1+n_2$ 的特例。又，《张邱建算经》卷上 18 问"十人分金"亦属同类问题，只是做了形式上的改头换面（见《张邱建算经·卷上"十人分金"问》）：

今有十等人，大官甲等十人，官赐金依等次差降之。上三人先入，得金四斤，持出。下四人后入，得金三斤，持出。中央三人未到者，亦依等次更给。问各得金几何，及未到三人复应得金几何？

术文中所给公差 $d$ 的求法与《九章》一致。可见，此类问题是中算家颇感兴趣的课题。在《九章算术》、《张邱建算经》等书中，涉及等差数列求和问题时，下列公式是常用的：

$$S_n=\frac{n}{2}[2a_n-(n-1)d],\ S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d], \qquad (4)$$

由式(4)得

$$a_n=\frac{s}{n}+\frac{n}{2}d-\frac{d}{2},\quad a_1=\frac{s}{n}-\frac{n}{2}d+\frac{d}{2}。 \qquad (5)$$

在式(3)中令 $n=n_1+n_2$，则有 $s=\Delta_1+\Delta_2$，故式(4)化为

$$a_n=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{n_1+n_2}+(\frac{\Delta_1}{n_1}-\frac{\Delta_2}{n_2})-\frac{1}{2}[\frac{2}{n_1+n_2}(\frac{\Delta_1}{n_1}-\frac{\Delta_2}{n_2})], \qquad (6_1)$$

$$a_1=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{n_1+n_2}-(\frac{\Delta_1}{n_1}-\frac{\Delta_2}{n_2})-\frac{1}{2}[\frac{2}{n_1+n_2}(\frac{\Delta_1}{n_1}-\frac{\Delta_2}{n_2})], \qquad (6_2)$$

与一行"定率"公式相比照可知式$(6_1)$即是其"至以后"定率，式$(6_2)$是其"分以后"定率。

上述分析，仅利用了中算家已有的数学知识和简单的推导，这种方法与思想并未越出隋唐时代的中算水平。尤其是一行不等间距的造术，更是《九章》"有竹九节"算法的直接演变。这样，我们看到中算家处理插值算法的思想源头正在《九章算术》：

$$比率 \rightarrow 衰分 < \begin{array}{l} 五尺金棰 \rightarrow 等间距二次内插算法 \\ 有竹九节 \rightarrow 不等间距二次内插算法 \end{array}$$

吴文俊先生指出"《九章算术》是我国古代数学方面流传至今最早也是最重要的一部经典著作。它承前启后，一方面总结了秦汉以前的数学成就，另一方面又成为汉代以来达 2 000 年之久数学创造的源泉。"[4]从以上对中算家处理等间距、不等间距问题思想方法的溯本探源，深感吴先生论断是何等精辟！

五纪历(762A. D. )、正元历(783 A. D. )法同大衍。徐昂宣明历(822 A. D. )也以不等间距计算日躔盈缩，但在计算方法上比一行算法作了进一步的改进。徐昂插值公式为(见《新唐书历志六"宣明历"》)：

$$f(LL_1+t)=f(U)+t\frac{\Delta_1}{L_1}+t\frac{L_1}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{\Delta_2}\right)-\frac{t^2}{L_1+L_2}\left(\frac{\Delta_1}{L_1}-\frac{\Delta_2}{L_2}\right), \tag{7}$$

这是不等间距二次内插公式的又一形式。

边冈崇玄历(893A. D. )重新改用平气，即各气长度相等。边冈公式为(见《新唐书志六"崇玄历"》)：

$$f(nL+t)=f(nL)+t\frac{\Delta_1}{L}+\frac{t}{2L}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{t^2}{L^2}(\Delta_1-\Delta_2) \tag{8}$$

式(8)显然是徐昂公式中 $L_1=L_2$ 的简化。

这样，刘焯二次内插公式在唐代 300 余年间经历了承袭→发展→改进→简化的历程。

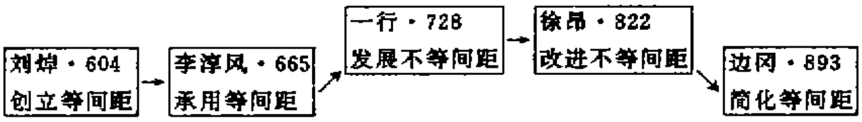


图 3 二次内插算法的演变历程

颇为值得深思的是：从刘焯公式到边冈公式，在数学上仅是一步代数公式恒等变形，然而在中国数学发展的历史上，这一步却经历了近 300 年，而且是经绕道不等间距公式的简化才达到的。

综上，我们看出，刘焯二次内插算法的数学原理出自《九章》，认为它可能是受到公元 600 年前后传入的巴比伦天文学影响的观点不能成立[5]。

刘焯"日躔盈缩"算法自边冈简化之后，多为后世历法所延用，直到郭守敬授时历(1280)创制平、立、定三次内插方法，才使这一传统算法跃上一个新台阶。

本文为笔者博士学位论文的部分内容，谨此向导师 李继闵 教授、李文林研究员的精心指导，致以衷心的感谢。

## 参考文献


1 严敦杰. 中算家的招差术. 数学通报，1955，1：4～13

2 李俨. 中算家的内插法研究. 北京：科学出版社，1957，27

3 Hopeng Yoke. Li, Qi AND SHU: An Introduction to Science and Civilization in China. Hong Kong: Hong Kong University Press, 1985, 158

4 吴文俊. 前言. 见：吴文俊主编. 九章算术与刘徽. 北京：北京师范大学出版社，1982，1

5 江晓原. 天学真原. 沈阳：辽宁教育出版社，1991，1：4～13


# Studies on Liu Zhuo's Interpolation and Its Development in the Tang Period

Ji Zhigang

(Department of Mathematics, Northwest University, 710069, Xi'an)

**Abstract** The principles of the restoration of the ancient proofs, as well as the methods of mathematical analyses are applied to study the structures of Liu Zhuo's equal intervals interpolation, to reveal this alogrithem program appears the construction and machanization which are the very characteristics of the Chinese clasical mathematics, and to explor the development of these alogrithems from the equal intervals to the unequal intervals in the Tang period.

**Key words** interpolation alogrithemic progrem history of mathematics