

② 7-10

一种新的锥形算法及其在信号处理中的应用

张书玲¹⁾ 张雪阳²⁾

TN911.7

(1)西北大学数学系,710069,西安;2)西安电子科技大学,710071;第一作者,38岁,男,博士)

A 摘要 提出了一种新的信号分解与重建锥形算法,此算法比锥形算法更具有合理性,且算法结构清晰,公式简单,占用贮存空间少,易于在计算机上实现。

关键词 滤波算子;锥形算法;信号分解与重建

分类号 O242; TN911.7

信息处理 信号分解
信号重建

当今时代由于电子计算机的快速发展,信息的提取、分析、传递、交换、贮存等技术日益提高。由于信息量的不断增加,通信业务与通信网容量之间的矛盾也日趋突出,大量的信息需要自动快速地完成诊断与分析、量化与压缩、传递与存贮、分解与重建等工作需求,所以,信号的数据压缩成为多媒体通信的关键技术之一。80年代初,提出了信号分解与重建的锥形算法^[1],把时变信号在不同频带中进行分解,通过对不同频带的信号量化编码,实现高效的数据压缩。文献1建立的 Laplace 锥形算法与后来建立的小波变换,将多尺度分析概念统一起来,已成为近年研究小波理论及其应用的重要工具^[2~4]。

文献1主要讨论了数字(离散)信号的分解与重建算法。设 $G^0: = \{G^0(i); i \in Z\}$ 是一数字信号,其中 Z 表示整数集合, W 是其脉冲响应为 $W(k)$ 的低通滤波器,满足:

$$\sum_k W(k) = 1, W(-k) = W(k), \sum_k W(2k) = \sum_k W(2k+1),$$

则 G^0 通过低通滤波 W , 再作偶取样($2 \downarrow 1$)后的低频成分为:

$$G^1(i) := \sum_k W(k) G^0(2i+k), i \in Z. \quad (1)$$

一般的,定义 $G^j(i) := \sum_k W(k) G^{j-1}(2i+k), i \in Z, j = 1, 2, \dots$ 。 (2)

如果 G^0 是有限长度的信号,从(2)可以看出, G^j 的数据量仅是 G^{j-1} 的一半,因此 $\{G^j\}_{j=0,1,2,\dots}$ 形成一个锥形结构,称 $\{G^j\}_{j=0,1,2,\dots}$ 为高斯锥(Gaussian Pyramid)。

G^j 是由 G^{j-1} 低通滤波后再作 2 取 1 变换所得,由于两者不等长,在提法上 G^j 不作为 G^{j-1} 的模糊像,要计算两者差异(细节信号),需要对 G^j 作“内插扩展”运算,即在不增加高频成分的前提下,将 G^j 扩展到与 G^{j-1} 等长度。

$$\text{定义 } EG^j(i) := G^{j+1}(i) := 2 \sum_k W(k) G^j\left(\frac{i-k}{2}\right). \quad (3)$$

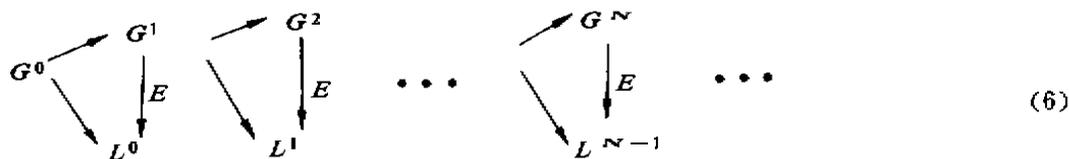
$$\text{其中 } G^j\left(\frac{i-k}{2}\right) = \begin{cases} G^j\left(\frac{i-k}{2}\right) & \text{当 } \frac{i-k}{2} \text{ 为整数时} \\ 0 & \text{否则。} \end{cases} \quad (4)$$

这样定义的 EG^j 其长度与 G^{j-1} 一样,称之为 G^{j-1} 的模糊像。

$$\text{令 } L^j := G^j - EG^{j+1} \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

显然 $\{L^j\}_{j=0,1,2,\dots}$ 也具有锥形结构,称 L^j 是 G^j 对应于 EG^{j+1} 的细节信号,也称为拉普拉斯锥(Laplacian)

Pyramid)。 (2), (3), (5) 给出了信号分解的算法^[1], 其分解流程为:



假设原始信号 G^0 经过 N 步分解后, 我们得到 $\{G^N, L^0, L^1, \dots, L^{N-1}\}$, G^N 为 G^0 的低频成分, $L^j, j=0, 1, \dots, N-1$ 是 G^0 在不同频带中的成分(细节)。

重建原始信号 G^0 可由(5)推得。由(5), 有

$$G^j = L^j + EG^{j+1}, \quad (7)$$

则由(7), 可依次计算出 $G^{N-1}, G^{N-2}, \dots, G^1, G^0$ 。

从以上讨论看到, 在分解算法(2), (3)及(5)中, 作滤波、偶采样、内插扩展, 才能形成 Laplace 锥 $\{L^j\}$, 这样, 每分解一步的计算公式较为复杂, 特别是内插扩展 E 的物理意义不够明显, 作为 G^{j-1} 模糊信号的 EG^{j+1} 不能清楚地表示成在低通滤波器的输出。本文从连续信号低通滤波器出发, 经过滤波/采样变换, 建立一种新的信号分解与重建锥形算法。该算法具有直接性和明显的物理意义, 避免了计算内插扩展 E 这一中间环节, 使得计算更为简便。

2 信号分解与重建的锥形算法

2.1 低通滤波算子及其离散化

设 $f(t) \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ 是一能量有限的时变信号, $g(x)$ 是频窗口有限的光滑函数, 且满足

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 1. \quad (8)$$

定义 1 低通滤波算子 $F_h: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), h > 0$,

$$F_h(f)(x) := \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x-t}{h}\right) f(t) dt, \quad (9)$$

如果记 $g_h := \frac{1}{h} g\left(\frac{\cdot}{h}\right)$, (10)

则(9)还可表示为 $F_h(f)(x) = g_h * f(x)$, (11)

其中 $*$ 表示为卷积运算。由假设 $g(x)$ 是时、频窗口有限, 则由傅氏分析可知

$$\hat{F}_h(f)(w) = \hat{g}_h(w) \cdot \hat{f}(w), \quad (12)$$

(9)定义了一个线性滤波系统。下面为离散滤波系统中的尺度 h 。记

$$\tau_j := \{2^{-j}\mathbb{Z}\}, j \in \mathbb{Z} \quad (13)$$

是一个二进制网序列, 显然若 $j_1 < j_2$, 则 $\tau_{j_1} \subset \tau_{j_2}$ 。则在 2^j 分辨率下(即 $\frac{1}{h} = 2^j$), 经过低通滤波器(9)后,

记为 $f_j(x) := 2^j \int_{\mathbb{R}} [2^j(x-t)] f(t) dt$, (14)

令 $\phi(x) = g(-x)$, 则(14)可表为:

$$f_j(x) = 2^j \int_{\mathbb{R}} \phi[2^j(t-x)] f(t) dt, \quad (15)$$

由(15)可以看到, 要计算不同的分辨率下的 f_j , 都要回到 $f(x)$ 上来; 另一方面 $f_{j-1}(x)$ 相比 $f_j(x)$ 含有更低一级的频率成分, 那么, 在计算 $f_{j-1}(x)$ 时, 能否可用 $f_j(x)$ 作为输入, 而不必回到 $f(x)$ 上去? 当然这与滤波系统有关, 亦与 ϕ 的选取有关。

定理 1 设 $\phi(x)$ 满足二尺度方程(Dilation equation):

$$\phi(x) = 2 \sum_l a_l \phi(2x+l), \quad (16)$$

则线性滤波系统(15)有因果关系, 即 $f_{j-1}(x) = \sum_l a_l f_j(x - 2^{-j}l)$. (17)

证明 由(15) $f_{j-1}(x) = 2^{j-1} \int_R \Phi[2^{j-1}(t-x)]f(t)dt = \int_R 2^j \sum_l a_l \Phi[2^j(t-x) + l] \cdot f(t)dt$
 $= \sum_l 2^j a_l \int_R \Phi[2^j(t-x) + l]f(t)dt = \sum_l a_l f_j(x - 2^{-j}l),$

称 $f_{j-1}(x)$ 为 $f_j(x)$ 的连续模糊信号, 而称 $f_j(x) - f_{j-1}(x) = L_j(x)$ 为连续细节信号。

2.2 数字信号的分解与重建算法

由于 $f_j(x)$ 是在 2^j 分辨率下 $f(x)$ 的模糊像, 在 τ_j 上对 $f_j(x)$ 离散化, 有

$$f_j(2^{-j}k) = 2^j \int_R \Phi(2^j t - k) f(t) dt, \quad k \in Z, \tag{18}$$

称 $\{f_j(2^{-j}k), k \in Z\}, j \in Z$ 为数字信号的高斯锥。为了计算数字信号两次滤波的差异, 称

$$f_{j-1}(2^{-j}k) = \sum_l a_l f_j(2^{-j}(k-l)), \quad k \in Z \tag{19}$$

为 $\{f_j(2^{-j}k), k \in Z\}$ 的模糊像。

而称 $L_j(2^{-j}k) = f_j(2^{-j}k) - f_{j-1}(2^{-j}k), k \in Z$ \tag{20}

为细节信号, 称 $\{L_j(2^{-j}k), k \in Z\}$ 为拉普拉斯锥。

在实际信号处理中, 由模数 A/D 转换, 我们只采集到某个分辨率下的数字信号。设采集的是 $f_{j_0}(2^{j_0}k), k \in Z$, 则(19), (20)给出了信号的分解算法:

I) 计算 f_{j_0} 模糊像 $f_{j_0-1} \quad f_{j_0-1}(2^{j_0}k) = \sum_l a_l f_{j_0}[2^{j_0}(k-l)], k \in Z.$ \tag{21}

II) 计算细节信号 $L_{j_0}(2^{j_0}k) = f_{j_0}(2^{j_0}k) - \sum_l a_l f_{j_0}[2^{j_0}(k-l)], k \in Z.$ \tag{22}

III) 对(21)偶采样, 形成下一层高斯锥: $f_{j_0-1}(2^{j_0-1}k), k \in Z.$ \tag{23}

为了与前边的记号一致, 将(21)~(23)写成更为一般的形式。

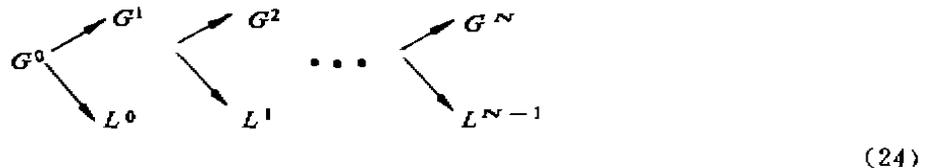
设 $\{G^0(k), k \in Z\}$ 是一数字信号, 则分解算法可表示为:

I) $\tilde{G}^j(k) = \sum_l a_l G^{j-1}(k-l), k \in Z.$ \tag{21'}

II) $L^{j-1}(k) = G^{j-1}(k) - \sum_l a_l G^{j-1}(k-l), k \in Z.$ \tag{22'}

III) $G^j(k) = \tilde{G}^j(2k), k \in Z.$ \tag{23'}

其算法流程为:



假设经过 N 步分解后, 得到 G^N 和 L^0, L^1, \dots, L^{N-1} , 下面来研究信号的重建算法。

由于在实际工程中, 信号源 G^0 总是有限长度, 另外, 可假定 $\sum_l a_l = 1, a_l = a_{-l}, a_l \geq 0, \sum_l a_{2l} = \sum_l a_{2l+1}$. 因而有如下定理。

定理 2 设 $\{a_l\}$ 是有限脉冲滤波器, 存在 n , 使 $a_l = 0$, 当 $l > n$ 时, 则方程(22')可唯一求解。即由细节信号可重建高斯锥 $G^{j-1}, j = 1, 2, \dots$ 。

证明 由假设, (22')可表示为 $A^{j-1}G^{j-1} = L^{j-1}$ \tag{25}

其中, $A^{j-1} = \begin{bmatrix} 1-a_0 & -a_1 & \dots & -a_n & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & 1-a_0 & \dots & -a_{n-1} & -a_n & \dots & 0 \\ & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & -a_n & \dots & -a_1 & 1-a_0 \end{bmatrix},$ \tag{26}

当 G^0 长度为 2^m 时, A^{j-1} 是一个 $2^{m-j+1} \times 2^{m-j+1}$ 的对称带状、主对角占优矩阵。这是因为 $\sum_l a_l = 1, a_l \geq 0, a_{-l} = a_l$. 因此(25)唯一可解。

例,若在滤波系统中选取 $\phi(x)$ 是一三次基 B-样条函数,则在二尺度方程 $\phi(x) = 2 \sum_l a_l \phi(2x-l)$

中,有 $a_0 = \frac{6}{16}, a_1 = a_{-1} = \frac{4}{16}, a_2 = a_{-2} = \frac{1}{16}, a_l = a_{-l} = 0$, 当 $|l| \geq 3$, 此时(26)的一般形式为:

$$\begin{bmatrix} \frac{10}{16} & -\frac{14}{16} & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{16} & \frac{10}{16} & -\frac{4}{16} & \frac{1}{16} & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{16} & -\frac{4}{16} & \frac{10}{16} & -\frac{4}{16} & -\frac{1}{16} & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ & & & & & & & & & & -\frac{1}{16} & -\frac{4}{16} & \frac{10}{16} \end{bmatrix}$$

因此可用追赶法去解(25),重建信号 G^0 。

从以上讨论可以看出,本文给出的分解算法(21')~(23')省去了计算 E 的这一环节,并且模糊信号(21)或(21')具有明显低通滤波物理意义,比文献 1 的分解算法合理、简单。在重建算法中,特别对于 5 长度脉冲的低通滤波器可用追赶法直接求解,且每个高斯锥 G^j 可独立求出,从而减少了由迭代运算产生的误差累积。在实际工程中,需要哪个分辨率下的模糊信号,在重建算法中,求解相应的方程即可,而不必依次迭代。因此本文给出的算法更具有实用性。

参 考 文 献

- 1 Burt P, Adelson E. The Laplacian pyramid as a compact image code. IEEE Trans. Comm. 1983, (31), 482~540
- 2 Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelats. Comm. Pure and Appl. Math, 1988, 41: 909~996
- 3 Mallat S. Theory for multiresolution signal decomposition; the wavelets representation. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, 2: 674~693
- 4 王世一. 数字信号处理. 北京:北京工业学院出版社, 1987

责任编辑 张素敏

The New Pyramid Algorithm for Signal Processing

Zhang Shuling Zhang Xueyang

(Department of Mathematics, 710069, Xi'an, Xidian University, 710071)

Abstract A new pyramid algorithm for signal decomposition and reconstruction is given. The algorithm is clearer and simpler than that of Burt and Adelson's and its scheme can be completed easily by computer.

Key words filter operator; pyramid algorithm; signal decomposition and reconstruction