

⑬ 321-324

用传递矩阵法求解柔性转子在 SFDB 中的失衡响应

贾振波 赵 谦 淡 勇

(西北大学化工系, 710069, 西安; 第一作者 51 岁, 男, 副教授)

TH117.2
TH134

A 摘要 用传递矩阵法推导出转子在挤压油膜阻尼器支承 SFDB 中特征盘运动微分方程, 并进行求解。与其他方法相比, 该方法节省机时, 可求得任一截面响应, 更重要的是可求得双稳态解, 这是其他方法难以相比的。

关键词 传递矩阵; 状态变量; 双稳态解

分类号 O151.26

转子, 传递矩阵法, SFDB
失衡响应, 柔性转子

对转子系统的振动进行主动控制, 可采用挤压油膜阻尼器支承(Squeeze Film Damper Bearing, 缩写为 SFDB)。由于油膜力高度非线性^[1], 以及特征盘在空间运动形式的复杂性, 建立运动微分方程并求解是十分困难的。本文用传递矩阵法建立并求解转子响应, 以便为主动控制打下基础^[2]。

1 特征盘运动微分方程的建立

对图 1 所示柔性转子, 在截面 2 处装有 SFDB, 用截面 2, 3 将轴分为 3 段, 今取其中任一轴段(图 2), 根据达朗伯尔原理及挠曲线近似微分方程有:

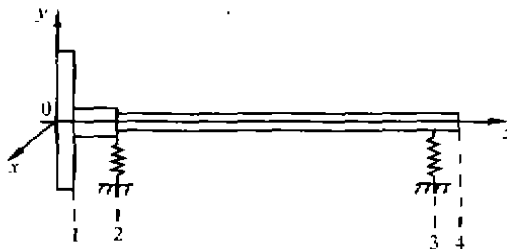


图 1 转子示意图

Fig. 1 Schematic Diagram of Rotor

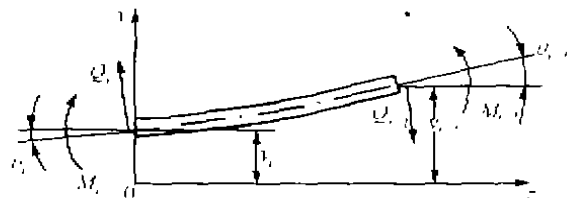


图 2 轴段传递矩阵推导图

Fig. 2 Transmit Matrix Inferring Diagram of the Section of Shaft

$$EIy^{(4)} + \rho\omega^2 y = 0 \tag{1}$$

其解为:

$$y = C_1 \cosh az + C_2 \sinh az + C_3 \cos az + C_4 \sin az \tag{2}$$

式中: $a = \sqrt{\rho\omega^2/EI}$ 。

又设第 i 段轴左、右两端面状态矢量^[3]分别为:

$$\{Z_i^R\} = \{y, \theta, M, Q\}^T; \quad \{Z_i^L\} = \{y_{i+1}, \theta_{i+1}, M_{i+1}, Q_{i+1}\}^T$$

由式(2)可得轴段两端面状态矢量关系式为:

$$\{Z_i^L\} = [C_{L_i}] \{Z_i^R\} \tag{3}$$

式中:

$$[C_{Li}] = \begin{bmatrix} S(k_i) & \frac{1}{\alpha} T(k_i) & \frac{1}{\alpha^2 EI} U(k_i) & \frac{1}{\alpha^3 EI} V(k_i) \\ \alpha V(k_i) & S(k_i) & \frac{1}{\alpha EI} T(k_i) & \alpha^2 EIU(k_i) \\ \alpha^2 EIU(k_i) & \alpha EIV(k_i) & S(k_i) & \frac{1}{\alpha} T(k_i) \\ \alpha^3 EIT(k_i) & \alpha^2 EIU(k_i) & \alpha V(k_i) & S(k_i) \end{bmatrix} \quad (4)$$

式(4)中: $k_i = \alpha l_i$, l_i 为第 i 段轴长, $S(k_i) = \frac{1}{2}(\text{ch}k_i + \cos k_i)$, $T(k_i) = \frac{1}{2}(\text{sh}k_i + \sin k_i)$, $U(k_i) = \frac{1}{2}(\text{ch}k_i - \cos k_i)$, $V(k_i) = \frac{1}{2}(\text{sh}k_i - \sin k_i)$ 。称 C_{Li} 为第 i 段轴传递矩阵, 矩阵中各元素与轴段几何尺寸、材料物理性质及转速有关, 与状态矢量无关。

对于第 i 个截面, 按该截面处是否有集中质量或集中力, 可分别得传递矩阵:

$$[C_{pi}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{或} \quad [C_{pi}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

于是第 i 个面左、右两边状态矢量关系为:

$$\{Z_i^R\} = [C_{pi}]\{Z_i^L\} \quad (6)$$

对图 1 所示的整轴段, 状态矢量有如下传递矩阵关系:

$$\begin{aligned} \{Z_4^L\} &= [C_{L3}]\{Z_3^R\} = [C_{L3}][C_{p3}]\{Z_3^L\} = [C_{L3}][C_{p3}][C_{L2}]\{Z_2^R\} \\ &= [C_{L3}][C_{p3}][C_{L2}][C_{p2}]\{Z_2^L\} - \{0 \ 0 \ 0 \ F_x\} \\ &= [C_{L3}][C_{p3}][C_{L2}][C_{p2}][C_{L1}]\{Z_1^R\} + [C_{L3}][C_{p3}][C_{L2}]\{0 \ 0 \ 0 \ F_x\} \end{aligned}$$

记: $[C] = [C_{L3}][C_{p3}][C_{L2}][C_{p2}][C_{L1}]$; $[F] = [C_{L3}][C_{p3}][C_{L2}]\{0 \ 0 \ 0 \ F_x\}$ 。

则有: $\{Z_4^L\} = [C]\{Z_1^R\} + [F]\{0 \ 0 \ 0 \ F_x\}^T$ 。 (7)

将整个轴右边界条件及左端特征盘按动静法所列写边界条件代入式(7)得特征盘运动微分方程为:

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_1 &= -\frac{I_p}{I_d} \omega \dot{\alpha}_1 + \frac{C_4}{I_d C_3} x_1 + \frac{C_5}{I_d C_3} \beta_1 + \frac{d_1}{I_d C_3} F_x, & \ddot{x}_1 &= \frac{C_1}{m C_2} x_1 + \frac{C_2}{m C_3} \beta_1 - \frac{C_e}{m} \dot{x}_1 + \frac{d_2}{m C_3} F_x + e \omega^2 \cos \omega t, \\ \ddot{\alpha}_1 &= -\frac{I_p}{I_d} \omega \dot{\beta}_1 + \frac{C_4}{I_d C_3} y_1 + \frac{C_5}{I_d C_3} \alpha_1 + \frac{d_1}{I_d C_3} F_y, & \ddot{y}_1 &= \frac{C_1}{m C_2} y_1 + \frac{C_2}{m C_3} \alpha_1 - \frac{C_e}{m} \dot{y}_1 + \frac{d_2}{m C_3} F_y + e \omega^2 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (8)$$

式中: $C_1 = C_{31}C_{43} - C_{41}C_{33}$; $C_2 = C_{32}C_{43} - C_{42}C_{33}$; $C_3 = C_{34}C_{43} - C_{44}C_{34}$; $C_4 = C_{21}C_{44} - C_{41}C_{24}$; $C_5 = C_{22}C_{44} - C_{42}C_{24}$; $d_1 = f_{34}C_{44} - f_{44}f_{34}$; $d_2 = f_{34}C_{43} - f_{44}C_{33}$; I_p , 盘极转动惯量; I_d , 盘直径转动惯量; α , 盘对 x 轴挠角; β , 盘对 y 轴挠角; C_e , 截面处阻尼系数; m , 盘质量; e , 盘偏心距。

2 运动微分方程求解

由对称性及实验观察, 轴颈中心在 SFDB 中的稳态响应可设为一同步圆进动, 即各截面处轴心运动方程可设为:

$$\begin{cases} x_i = R_i \cos(\omega t - \psi_i) \\ y_i = R_i \sin(\omega t - \psi_i) \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (9)$$

对于一截面挠角可设为:

$$\begin{cases} \beta_1 = \theta \cos(\omega t - \varphi) \\ \alpha_1 = \theta \sin(\omega t - \varphi) \end{cases} \quad (10)$$

再将油膜力沿 x, y 方向分解有:

$$\begin{cases} F_x = -F_r \cos(\omega t - \psi_2) + F_t \sin(\omega t - \psi_2) \\ F_y = -F_r \sin(\omega t - \psi_2) - F_t \cos(\omega t - \psi_2) \end{cases} \quad (11)$$

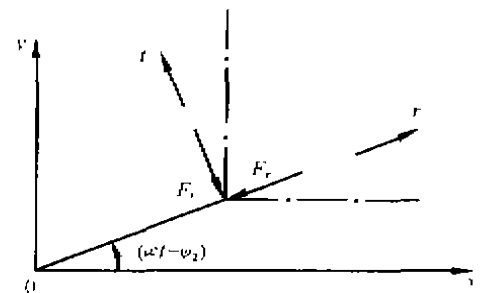


图 3 油膜力示意图
Fig. 3 Schematic Diagram of Force of Oil Film

将式(9),(10),(11)代入方程(8),经整理可得关于 $R_1, \psi_1, \theta, \varphi, R_2, \psi_2$ 的一组代数方程组,以矩阵形式表示为:

$$[A]\{X_1\} = [B]\begin{Bmatrix} F_r \cos \psi_2 + F_t \sin \psi_2 \\ F_r \sin \psi_2 - F_t \cos \psi_2 \end{Bmatrix} + \{D\}. \quad (12)$$

式中:

$$[A] = \begin{bmatrix} \omega^2 + \frac{1}{m} \frac{C_1}{C_3} & -\frac{C_e}{m} \omega & \frac{1}{m} \frac{C_2}{C_3} & 0 \\ \frac{C_e}{m} \omega & \omega^2 + \frac{1}{m} \frac{C_1}{C_3} & 0 & \frac{1}{m} \frac{C_2}{C_3} \\ \frac{1}{I_d} \frac{C_4}{C_3} & 0 & \omega^2 - \frac{I_p}{I_d} \omega^2 + \frac{1}{I_d} \frac{C_5}{C_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_d} \frac{C_4}{C_3} & 0 & \omega^2 - \frac{I_p}{I_d} \omega^2 + \frac{1}{I_d} \frac{C_5}{C_3} \end{bmatrix}; \quad [B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \frac{d_2}{C_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \frac{d_2}{C_3} \\ \frac{1}{I_d} \frac{d_1}{C_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_d} \frac{d_1}{C_3} \end{bmatrix}$$

$$\{X_1\} = [R_1 \cos \psi_1 \quad R_1 \sin \psi_1 \quad \theta \cos \varphi \quad \theta \sin \varphi]^T; \quad \{D\} = [-e\omega^2 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

方程(12)中,未知量个数为6,而方程个数只有4个,显然为一不定方程组,为使未知量唯一确定,可由1,2截面之间的传递矩阵关系: $\{Z_2^L\} = [C_{L1}]\{Z_1^R\}$ 得补充方程,为了避免记号混淆,可令 $C_{L1} = k$, 有: $x_{L1} = k_{11}x_1 + k_{12}\beta_1 + k_{13}M_{z1} + k_{14}Q_{z1}$.

$$\text{即: } \{X_2\} = [G]\{X_1\} + \{T_1\}. \quad (13)$$

$$\text{式中: } \{X_2\} = \{\cos \psi_2, \sin \psi_2\}^T; \quad \{T_1\} = \left\{ \frac{k_{14}m\omega^2}{R_2}, 0 \right\}^T;$$

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{k_{11} + mk_{14}}{R_2} & -\frac{C_e \omega}{R_2} & \frac{k_{12} + k_{13}(I_p - I_d \omega^2)}{R_2} & 0 \\ \frac{C_e \omega}{R_2} & \frac{k_{11} + k_{14}m}{R_2} & 0 & \frac{k_{12} - k_{13}(I_p - I_d \omega^2)}{R_2} \end{bmatrix}.$$

联立方程(12),(13)可求出 $R_2, \psi_2, R_1, \psi_1, \theta, \varphi$ 6个未知量来,根据本方程特点可采用以下解法.

由式(12)得:

$$\{X_1\} = [A^{-1}][B]\begin{Bmatrix} F_r \cos \psi_2 + F_t \sin \psi_2 \\ F_r \sin \psi_2 - F_t \cos \psi_2 \end{Bmatrix} + [A^{-1}]\{D\}. \quad (14)$$

将式(14)代入式(13)中: $\{X_2\} = ([G][A^{-1}][B]F_r + [G][A^{-1}][B]F_t)\{X_2\} + [G][A^{-1}]\{D\} + \{T_1\}$.

式中: $[G][A^{-1}][B]$ 为 $[G][A^{-1}][B]$ 交换两列元素后的矩阵,记:

$$[S] = [I] - [G][A^{-1}][B]F_r - [G][A^{-1}][B]F_t,$$

$$\{T\} = [G][A^{-1}]\{D\} + \{T_1\}.$$

上式又可写为: $[S]\{X_2\} = \{T\}$.

$$(15)$$

由于 $\sin^2 \psi_2 + \cos^2 \psi_2 = 1$, 故有: $(t_1 S_{22} - t_2 S_{12})^2 + (t_2 S_{11} - t_1 S_{21})^2 = (S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21})^2$.

$$(16)$$

式(16)是关于 R_2 的非线性代数方程组,因 $R_2 < C$, 故可用试凑法求解,如瞎子爬山法. 由于式(16)的非线性,可能出现多个解的情况,这就是通常所说的双稳态现象. 在某些参数组合下,按本文方法求得了3个解,计算结果有 Duffing 型的,也有孤立型的解.

在求得 R_2 后,可按下式依次求得其他未知量:

$$\{X_1\} = [A^{-1}][B]\begin{Bmatrix} F_r \cos \psi_2 + F_t \sin \psi_2 \\ F_r \sin \psi_2 - F_t \cos \psi_2 \end{Bmatrix} + [A^{-1}]\{D\}; \quad \tan \psi_2 = (t_2 S_{11} - t_1 S_{21}) / (t_1 S_{22} - t_2 S_{12}).$$

同理由传递矩阵关系:

$$\{Z_2^L\} = [H]\{Z_1^R\} + [N]\{0 \quad 0 \quad 0 \quad F_z\}^T. \quad (17)$$

式中: $[H] = [C_{L2}][C_{L2}][C_{L1}]; \quad [N] = [C_{L2}]$.

由式(17)得:

$$R_2 \cos \psi_3 = (h_{11} + h_{14}m\omega^2)R_1 \cos \psi_1 + [h_{12} + h_{13}(I_p - I_d)\omega^2]\theta \cos \varphi + h_{14}(me\omega^2 - C_e R_1 \omega \sin \psi_2) - h_{14}(-F_r \cos \psi_2 - F_t \sin \psi_2);$$

$$R_2 \sin \psi_2 = (h_{11} + h_{14} m \omega^2) R_1 \sin \psi_1 + [h_{12} + h_{13} (I_2 - I_1) \omega^2] \theta \sin \varphi + h_{14} C_e R_1 \omega^2 \cos \varphi_1 + h_{14} (-F_r \sin \psi_2 - F_l \cos \psi_2)$$

由以上二式可确定出 R_2, ψ_2 来。

3 结束语

本文用传递矩阵法列写并求解运动微分方程。其特点是：节省机时，能求出双稳态解，还可求出任一截面响应，为转子在 SFDB 中主动控制研究奠定了基础。对于主动控制这一重要问题，由于篇幅所限并未涉及，有待进一步研究讨论。

参 考 文 献

- 1 西安交通大学润滑理论研究室编. 流体动力润滑理论. 北京: 科学出版社, 1981
- 2 Nonami K, Yamanaka T. Vibration and control of flexible rotor supported by magnetic bearing. JSME, Series III, 1990, 33(4): 415~452
- 3 季文美, 方同, 陈松淇. 机械振动. 北京: 科学出版社, 1985

责任编辑 张银玲

Transmit Matrix Method of Unbalance Response Calculation of Flexible Rotor SFDB System

Jia Zhenbo Zhao Yuan Dan Yong

(Department of Chemical Engineering, Northwestern University, 710069, Xi'an)

Abstract A new method of deriving and calculating, which can be used for the differential equations of motion of flexible, rotor system supported in Squeeze Film Damper Bearing (SFDB), is proposed by transmitting matrix. Compared with other methods the matrix method has the characteristics of saving computation time and storage. The vibration response of any transection. Especially the double-stable solution can be got by the method.

Key words transmit matrix; state sector; double-stable solutions

• 学术动态 •

本刊成为被引频次最高的 500 种中国科技期刊之一

中国科学院主办的《中国科技期刊研究》1996 年第 2 期报道, 中国科学引文数据库根据 1994 年度的统计, 确认被引频次最高的 500 种中国科技期刊排行榜。《西北大学学报》(自然科学版) 位列第 265 名。本刊之后尚有《浙江大学学报》(282 名)、《中国科学技术大学学报》(290 名)、《哈尔滨工业大学学报》(294 名)、《同济大学学报》(303 名)、《西北工业大学学报》(303 名)、《上海交大学报》(312 名)、《南开大学学报》(328 名)、《国防科技大学学报》(390 名)、《山东大学学报》(400 名) 等。

据国家科委 1995 年 11 月统计, 现在全国共有公开发行的期刊 8 000 余种, 内部期刊 1 000 余种, 公开发行的科技期刊为 4 386 种。

(姚 远)