①

1994 年 12 月　　西北大学学报(自然科学版)　　Dec. 1994
第 24 卷　第 6 期　　Journal of Northwest University (Natural Science Edition)　　Vol. 24　No. 6

关于算术级数中 Lehmer D H 数的分布*

94,24(6)
471-474

张文鹏

(西北大学数学系,710069,西安太白路 1 号;35 岁,男,教授)

摘　要　设 $q>2$ 是一个奇数,对任意整数 $1\leqslant a\leqslant q-1$ 且 $(a,q)=1$, 存在唯一的整数 $1\leqslant \bar{a}\leqslant q-1$,使得 $a\bar{a}\equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$,定义数 a 为 Lehmer 数,如果 a 和 $\bar{a}$ 具有相反的奇偶性。研究算术级数中 Lehmer D H 数的分布性质,并证明一个有趣的极限分布定理和渐近公式。

关键词　勒默数　分布性质　渐近公式,勒赫曼数,算术级数
分类号　O156.4

设模 $q\geqslant 3$ 为奇数,对任一整数 $1\leqslant a\leqslant q-1$ 且 $(a,q)=1$,我们知道存在唯一的整数 $1\leqslant \bar{a}\leqslant q-1$ 使得 $a\bar{a}\equiv(\mathrm{mod}\ q)$。用 $r(q)$ 表示同余方程 $a\bar{a}\equiv(\mathrm{mod}\ q)$ 中满足条件 $1\leqslant a,\bar{a}\leqslant q-1$ 且 a 与 $\bar{a}$ 具有相反的奇偶性的解的个数,在文献 1 中 Lehmer D H 曾提出求 $r(p)$ 的值或者说一些有关它的非平凡性质,其中 p 表示素数。为方便起见,我们称这样的数为 Lehmer D H 数、文献 2 中首次研究了这一问题,并证明了对任一奇数 q 有渐近公式:

$$r(q)=\frac{1}{2}\varphi(q)+O(q^{\frac{1}{2}}d(q)\ln^2 q)。\tag{1}$$

本文的主要目的是研究 Lehmer D H 数在算术级数中的分布性,并利用 Kloosterman 和估计及其三角和方法给出一个有趣的极限分布公式,即对任意给定的实数 $0<x,y\leqslant 1$,奇数 $c\geqslant 3$ 及正整数 d,令 $A=\{cn+d;n=0,1,\cdots\}$,定义:$F_q(x,y)=\#\{a;a,\bar{a}\in A,a\leqslant xq,\bar{a}\leqslant yq;2|a+\bar{a}\}$。

我们有下面的

定理　对充分大的奇数 q,当 $(q,c)=1$ 时有渐近公式

$$F_q(x,y)=\frac{1}{2}\frac{\varphi(q)}{c^2}xy+O(q^{\frac{1}{2}}d(q)\ln^2 q)。$$

其中 $\varphi(q)$ 为 Euler 函数、$d(q)$ 为除数函数。

由定理我们立刻推出下面的极限分布公式 $\lim\limits_{q\to\infty}\dfrac{F_q(x,y)}{\varphi(q)}=\dfrac{1}{2}\dfrac{xy}{c^2}$。

1　几个引理

为完成定理的证明,我们需要下面几个基本引理,首先有

引理 1　对给定的算术级数 $A=\{cn+d\}$,当 $2|c$ 且 $(c,q)=1$ 时有

$$(\text{I})\quad A(m,x)=\sum_{\substack{a\leqslant xq\\ a\in A}}e\left(\frac{-ma}{q}\right)\begin{cases}=\dfrac{xq}{c}+O(1);若\ q|m\\[2ex] \ll\dfrac{1}{\left|\sin\dfrac{\pi mc}{q}\right|};若\ q|m,\end{cases}$$

---

* 数学天元基金资助课题
收稿日期:1994-03-05

(Ⅰ) $B(m,x)\ll\dfrac{1}{\left|\cos\dfrac{\pi mc}{q}\right|}$, $e(y)=e^{2\pi iy}$。

证明 先证(Ⅰ),当 $q|m$ 时,显然有

$$A(m,x)=\sum_{\substack{a\leqslant xq\\ a\in A}}1=\sum_{cn+d\leqslant xq}1=\frac{xq}{c}+O(1),\tag{2}$$

当 $q\nmid m$ 时有估计式

$$|A(m,x)|=\left|\sum_{cn+d\leqslant xq}e\left(\frac{-m(cn+d)}{q}\right)\right|\ll\frac{1}{\left|1-e\left(\frac{-mc}{q}\right)\right|}\ll\frac{1}{\left|\sin\frac{\pi mc}{q}\right|}。\tag{3}$$

由(2)及(3)立刻推出(Ⅰ)。

当 $q\nmid m$ 时,显然有 $B(m,x)=O(1)$ 成立。当 $q\nmid m$ 时,我们有

$$|B(m,x)|=\left|\sum_{cn+d\leqslant xq}(-1)^{cn+d}e\left(\frac{-m(cn+d)}{q}\right)\right|=\left|\sum_{n\leqslant\frac{xq-d}{c}}(-1)^{n}e\left(\frac{-mcn}{q}\right)\right|$$

$$\ll\frac{1}{\left|1+e\left(\frac{-mc}{q}\right)\right|}\ll\frac{1}{\left|\cos\frac{\pi mc}{q}\right|},$$ 于是完成了引理 1 的证明。

引理 2 设 m,n 及 q 为整数且 $q>1$,则 $S(m,n;q)=\sum\limits_{\substack{d(\bmod q)\\(d,q)=1}}e\left(m\dfrac{\bar d}{q}+n\dfrac{d}{q}\right)\ll(m,n,q)^{\frac12}q^{\frac12}d(q)$,其中 $d\bar d\equiv1(\bmod q)$,(m,n,q) 表示 m,n 及 q 的最大公因子。

证明 参阅文献 3。

引理 3 设 q 为充分大的奇整数,则有

$$F_q(x,y)=\frac{1}{2q^2}\left[\sum_{r=1}^{q}\sum_{s=1}^{q}S(r,s;q)A(r,x)A(s,y)-\sum_{r=1}^{q}\sum_{s=1}^{q}S(r,s;q)B(r,x)B(s,y)\right]。$$

证明 对算术级数 $A=\{cn+d\}$,显然有

$$F_q(x,y)=\sum_{\substack{a\leqslant xq\\ a\in A}}\sum_{\substack{b\leqslant yq\\ b\in A\\ ab\equiv1(q)}}\frac{1}{2}(1-(-1)^{a+b})=\frac{1}{2}\sum_{\substack{a\leqslant xq\\ a\in A}}\sum_{\substack{b\leqslant yq\\ b\in A\\ ab\equiv1(q)}}1-\frac{1}{2}\sum_{\substack{a\leqslant xq\\ a\in A}}\sum_{\substack{b\leqslant yq\\ b\in A\\ ab\equiv1(q)}}(-1)^{a-b},\tag{4}$$

注意到三角恒等式

$$\sum_{a=1}^{q}e\left(\frac{am}{q}\right)=\begin{cases}q,\text{如果 } q|m\\ 0,\text{如果 } q\nmid m\end{cases}。$$

我们立刻得到

$$\sum_{\substack{a\leqslant xq\\ a\in A}}\sum_{\substack{b\leqslant yq\\ b\in A\\ ab\equiv1(q)}}1=\sum_{\substack{a,b=1\\ ab\equiv1(q)}}^{q-1}\sum_{\substack{u\leqslant xq\\ u\in A}}\sum_{\substack{v\leqslant yq\\ v\in A}}\sum_{r=1}^{q}\sum_{s=1}^{q}\frac{1}{q^2}e\left(\frac{r(a-u)}{q}\right)e\left(\frac{s(b-v)}{q}\right)$$

$$=\sum_{r=1}^{q}\sum_{s=1}^{q}\frac{1}{q^2}\left(\sum_{\substack{a=1}}^{q-1}\sum_{\substack{b=1\\ ab\equiv1(q)}}^{q-1}e\left(\frac{ra+sb}{q}\right)\right)A(r,x)A(s,y)$$

$$=\frac{1}{q^2}\sum_{r=1}^{q}\sum_{s=1}^{q}S(r,s;q)A(r,x)A(s,y)。\tag{5}$$

同理可推出:$$\sum_{\substack{a\leqslant xq\\ a\in A}}\sum_{\substack{b\leqslant yq\\ b\in A\\ ab\equiv1(q)}}(-1)^{a+b}=\frac{1}{q^2}\sum_{r=1}^{q}\sum_{s=1}^{q}S(r,s;q)B(r,x)B(s,y)。\tag{6}$$

结合(4),(5)及(6)式即可得到引理 3 的证明。

2 定理的证明

有了上一节的几个引理,我们容易给出定理的证明。事实上,当 $(c,q)=1$ 时,由引理 1 及引理 2 不难得到

$$S(q,q;q)A(q,x)A(q,y)=\varphi(q)\left(\frac{xq}{c}+O(1)\right)\left(\frac{yq}{c}+O(1)\right)$$

$$=\varphi(q)\frac{xyq^2}{c^2}+O(q^2)。\qquad(7)$$

$$\sum_{r=1}^{q-1}S(r,q;q)A(r,x)A(q,y)\ll\sum_{r=1}^{q-1}(r,q)^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}d(q)\cdot\frac{yq}{c}\cdot\frac{1}{\left|\sin\frac{\pi rc}{q}\right|}$$

$$\ll q^{\frac{3}{2}}\sum_{r=1}^{q-1}\frac{(r,q)^{\frac{1}{2}}qd(q)}{r}\ll q^{\frac{5}{2}}d^2(q)\ln q。\qquad(8)$$

$$\sum_{s=1}^{q-1}S(q,s;q)A(q,x)A(s,y)\ll q^{\frac{5}{2}}d^2(q)\ln q。\qquad(9)$$

$$\sum_{r=1}^{q-1}\sum_{s=1}^{q-1}S(r,s;q)A(r,x)A(s,y)\ll\sum_{r=1}^{q-1}\sum_{s=1}^{q-1}q^{\frac{1}{2}}(r,s;q)^{\frac{1}{2}}d(q)\cdot\frac{1}{\left|\sin\frac{\pi rc}{q}\right|\left|\sin\frac{\pi sc}{q}\right|}$$

$$\ll q^{\frac{5}{2}}d(q)\sum_{r=1}^{q-1}\sum_{s=1}^{q-1}\frac{(r,s,q)^{\frac{1}{2}}}{rs}\ll q^{\frac{5}{2}}d^2(q)\ln^2 q。\qquad(10)$$

于是由(7),(8),(9)及(10)式可得

$$\sum_{r=1}^{q}\sum_{s=1}^{q}S(r,s;q)A(r,x)A(s,y)$$

$$=S(q,q;q)A(q,x)A(q,y)+\sum_{r=1}^{q-1}S(r,q;q)A(r,x)A(q,y)+$$

$$+\sum_{s=1}^{q-1}S(q,s;q)A(q,x)A(s,y)+\sum_{r=1}^{q-1}\sum_{s=1}^{q-1}S(r,s;q)A(r,x)A(s,y)$$

$$=\varphi(q)\frac{xyq^2}{c^2}+O(q^{\frac{5}{2}}d^2(q)\ln^2 q)。\qquad(11)$$

注意到 $\cos\frac{\pi mc}{q}=\sin\frac{\pi(q-2mc)}{2q}$,

由引理 1 的(Ⅰ)及(11)式的证明方法并注意到 $q-2mc\neq0$ 我们不难得到:

$$\sum_{r=1}^{q}\sum_{s=1}^{q}S(r,s;q)B(r,x)B(s,y)$$

$$\ll\varphi(q)+\sum_{r=1}^{q-1}q^{\frac{1}{2}}(r,q)^{\frac{1}{2}}d(q)\,|B(r,x)|+\sum_{r=1}^{q-1}\sum_{s=1}^{q-1}q^{\frac{1}{2}}(r,s,q)^{\frac{1}{2}}d(q)\,|B(r,x)|\cdot|B(s,y)|$$

$$\ll q^{\frac{1}{2}}d(q)\sum_{r=1}^{q-1}\frac{(r,q)^{\frac{1}{2}}}{\left|\sin\frac{\pi(q-2cr)}{2q}\right|}+$$

$$+q^{\frac{1}{2}}d(q)\sum_{r=1}^{q-1}\sum_{s=1}^{q-1}\frac{(r,s,q)^{\frac{1}{2}}}{\left|\sin\frac{\pi(q-2cr)}{2q}\right|\cdot\left|\sin\frac{\pi(q-2cs)}{2q}\right|}\ll q^{\frac{5}{2}}d^2(q)\ln^2 q。\qquad(12)$$

由(11),(12)式及引理 3 立刻得到

$$F_q(x,y)=\varphi(q)\cdot\frac{xy}{2c^2}+O(q^{\frac{1}{2}}d^2(q)\ln^2 q)。$$

于是完成了定理的证明。

由定理容易得到极限分布公式:

$$\lim_{q\to\infty}\frac{F_q(x,y)}{\varphi(q)}=\frac{xy}{2c^2}+O\left(\lim_{q\to\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}}d^2(q)\ln^2 q}{\varphi(q)}\right)=\frac{xy}{2c^2}。$$

这一极限公式在概率论中有着重要的解释,即 Lehmer D H 数在算术级数中是均匀分布的。特别当 $c=x=y=1$ 时,即可由定理推出(1)式。

参 考 文 献

1 张文鹏. 关于 Lehmer 问题及其推广. 西北大学学报(自然科学版), 1993, 23(2): 103~108

2 Richard K Guy. Unsolved Problem in Number Theory. New York: Springer-Verlag, 1981. 139~140

3 Estermann T. On Kloosterman's sum. Mathematika, 1961(8): 83~86

On the Distribution of Lehmer D H Number in Arithmetical Progression

Zhang Wenpeng

(Department of Mathematics, Northwest University, 710069, Xi'an)

Abstract Let $q>2$ be an odd number, for each $1\leqslant a\leqslant q-1$ with $(a,q)=1$, it is clear that there exists one and only one $1\leqslant \bar{a}\leqslant q-1$ such that $a\bar{a}\equiv 1 \pmod q$. Such number is called as a Lehmer D H number if a and $\bar{a}$ are of opposite parity. The main purpose of this paper is to study the distribution propertities of Lehmer D H number and give a sharper limiting distribution formula.

Key words Lehmer D H number distribution propertities asymptotic formula