1996年6月　　西北大学学报(自然科学版)　　Jun. 1996
第26卷　第3期　　Journal of Northwest University(Natural Science Edition)　　Vol. 26　No. 3

④
199-200

关于微分算子 D^k 的范数*

O175.3

李柏玲

(西安统计学院信息系,710061,西安;52岁,女,副教授)

A

摘　要　对于给定的范数,证明了微分算子 D^k 的范数 $\|D^k\|=1$,$k=1,2,\cdots$。

关键词　赋范线性空间;线性算子;有界算子;算子的范数;微分算子

分类号　O177.2

对于微分算子 $D:C_1[a,b]\to C[a,b]$,$Df=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=f'(x)$,文献1中指出,如果在 $C_1[a,b]$ 上选取不同的范数时,D 可能是有界算子或无界算子。文献2中对 $C_1[a,b]$ 上取定的范数,证明了 D 的范数 $\|D\|\leqslant 1$。本文对任意阶的微分算子 D^k,对于定义域上取定的两种范数,分别证明了 D^k 的范数 $\|D^k\|=1$,$k=1,2,\cdots$。

设 $(U,\|\cdot\|_u)$,$(V,\|\cdot\|_v)$ 为同一数域上的两个赋范线性空间,$A:(U,\|\cdot\|_u)\to(V,\|\cdot\|_v)$ 为线性算子,若算子 $A:U\to V$ 把 U 中每个界集都映为 V 中的有界集,则称 A 为有界算子。线性算子 $A:U\to V$ 为有界的充分必要条件是存在正数 M,使

$$\|Au\|\leqslant M\|u\|,\quad u\in U \tag{1}$$

定义线性有界算子 A 的范数为

$$\|A\|=\inf\{M:\|Au\|\leqslant M\|u\|,u\in U,u\neq 0\}, \tag{2}$$

易知

$$\|A\|=\sup\{\frac{\|Au\|}{\|u\|};u\in U,u\neq 0\}$$
$$=\sup\{\|Au\|;u\in U,\|u\|=1\}。 \tag{3}$$

考查微分算子 $D^k:C_k[a,b]\to C[a,b]$,$D^kf=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^k}f(x)=f^{(k)}(x)$,$k=1,2,\cdots(D^1=D)$,其中 $C[a,b]$ 表示区间 $[a,b](b>a)$ 上连续函数的全体,赋予范数 $\|\cdot\|_\infty=\sup\{|f(x)|;a\leqslant x\leqslant b\}$,$C_k[a,b]$ 表示在 $[a,b]$ 上具有 k 阶连续导数的函数的全体,并赋予适当的范数。$D^k:C_k[a,b]\to C[a,b]$ 是线性算子,在 $C_k[a,b]$ 上取不同的范数时,可以验证 D^k 可能有界或无界。例如,若视 $C_1[a,b]$ 为 $(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$ 的子空间,取 $f_n(x)=\sin(n\pi\frac{x-a}{b-a})$,此时 $\|f_n\|_\infty=1$,$\|D^1f_n\|_\infty=\|f'_n\|_\infty=\sup\{|\frac{n\pi}{b-a}\cos(n\pi\frac{x-a}{b-a})|,a\leqslant x\leqslant b\}=\frac{n\pi}{b-a}\to\infty(n\to\infty)$,即 D^1 是无界的。下面在 $C_k[a,b]$ 上分别选取如下的范数

$$\|f\|_{1,k}=\sup\{|f(x)|;a\leqslant x\leqslant b\}+\sup\{|f'(x)|;a\leqslant x\leqslant b\}+\cdots$$
$$+\sup\{|f^{(k)}(x)|;a\leqslant x\leqslant b\}$$
$$=\sum_{i=0}^{k}\sup\{|f^{(i)}(x)|;a\leqslant x\leqslant b\}, \tag{4}$$

$$\|f\|_{2,k}=\sup\{|f(x)|,|f'(x)|,\cdots,|f^{(k)}(x)|;a\leqslant x\leqslant b\}。 \tag{5}$$

* 收稿日期:1996-02-05

可证 D^k 是有界算子，且有，

定理1 设微分算子 $D^k:(C_k[a,b],\|\cdot\|_{1,k})\to(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$，$D^kf=f^{(k)}(x)$，$k=1,2,\cdots$，则 $\|D^k\|=1$。

证明 由(4)知，$\|D^kf\|_\infty\leqslant\|f\|_{1,k}$，再由(2)得

$$\|D^k\|\leqslant 1。\tag{6}$$

取 $f_n(x)=(x-a)^n/[(b-a)^np(n)]$，$n=k+1,k+2,\cdots$，其中 $p(n)=1+n/(b-a)+n(n-1)/(b-a)^2+\cdots+n(n-1)\cdots(n-k+1)/(b-a)^k$ 是关于 n 的 k 次多项式。按(4)，

$$\begin{aligned}\|f_n\|_{1,k}&=\sum_{i=0}^{k}\sup\{|f_n^{(i)}(x)|;a\leqslant x\leqslant b\}\\&=\sup\{|(x-a)^n/[(b-a)^np(n)]|,a\leqslant x\leqslant b\}+\sup\{|n(x-a)^{n-1}/[(b-a)^np(n)]|,\\&\quad a\leqslant x\leqslant b\}+\cdots+\sup\{|n(r-1))\cdots(n-k+1)(x-a)^{n-k}/[(b-a)^np(n)]|,\\&\quad a\leqslant x\leqslant b\}\\&=1/p(n)+n/[(b-a)p(n)]+\cdots+n(n-1)\cdots(n-k+1)/[(b-a)^kp(n)]\\&=1,\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}\|D^kf_n\|_\infty&=\sup\{|f_n^{(k)}(x)|,a\leqslant x\leqslant b\}\\&=n(n-1)\cdots n(n-k+1)/[(b-a)^kp(n)]\to1(n\to\infty)。\end{aligned}\tag{8}$$

由(3)，(7)和(8)知 $\|D^k\|\geqslant1$，结合(6)，得 $\|D^k\|=1$，$k=1,2,\cdots$。

定理2 设微分算子 $D^k:(C_k[a,b],\|\cdot\|_{2,k})\to(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$，$D^kf=f^{(k)}(x)$，$k=1,2,\cdots$，则 $\|D^k\|=1$。

证明 注意到函数 $f(x)=e^x\in C_k[a,b]$，$k=1,2,\cdots$，有 $f(x)=f'(x)=\cdots=f^{(k)}(x)$。由(5)知 $\|f\|_{2,k}=\|D^kf\|_\infty$，与定理1的证明类似，可得出 $\|D^k\|=1$。

参 考 文 献

1 Oden J. Applied Functional Analysis. Englewood Cliffs. NJ: Prentice-Hall, INC., 1979

2 周肇锡. 应用泛函分析基础. 西安:西北工业大学出版社,1996

责任编辑 张素敏

Norms of Differentiable Operator D^k

Li Bailing

(Department of Information, Xi'an Statistics College, 710061, Xi'an)

Abstract The result is proved that $\|D^k\|$, norms of differentiable operator $D^k(k=1,2,\cdots)$, equal 1 for some given norms.

Key words normed linear space; linear operator; bounded operator; norm of an operator; differentiable operator