合作型对策的理论、方法和应用°

周晓玲

(陕西财经学院管理科学系, 陕西 西安 710061)

摘要　讨论了合作型对策的一些基本理论, 通过一些例子说明了应用理论解决实际问题的方法。

关键词　合作型对策　谈判集　策略

Theory, Method and Application of Cooperative Game

Zhou Xiaoling

(Department of Management Science, Shaanxi Institute of Finance and Economics, Xi'an 710061)

Abstract　Theory of cooperative game under uncertainty was discussed in this paper. the method how to use the theory was introduced. Application of the theory and method was showed.

Keywords　cooperative game; negotiation set; policy making

1　引言

在国际谈判、军事斗争、商业竞争、体育竞赛等社会现象中, 我们留心就会发现这些现象都有一个共同的特点, 就是都反映了集团之间或者个人之间的利害冲突。但我们仔细分析, 又会发现有些冲突现象, 冲突双方的利益是对立的, (一方的失即为另一方的得), 象体育竞赛。而有些冲突现象只要双方充分协商, 就会取得一个对双方都满意的效果, 象国际谈判。前者属于二人零和对策(假定有两个局中人), 而后者就可以归为二人合作型对策之中。

合作型对策与非合作型对策, 一个重要的区别就是局中人是否合作, 这里所指的合作是局中人在开始对策之前先与另一位局中人就对策问题作一番商讨, 然后再确定双方的联合策略。协商的结果比如说是一致同意局中人Ⅰ采用策略 $x \in X$, 局中人Ⅱ采用策略 $y \in Y$ (X, Y 分别为局中人Ⅰ, Ⅱ的策略集), 那么应当认为这种协议双方都有约束作用。

2　理论与方法

2.1　合作型对策的赢得区域

我们先来看一个较典型的趣味对策的例子(夫妻争执问题), 一对新婚夫妻为晚上到哪里去玩争执不下, 妻子想去剧院, 而丈夫想去看足球赛。他们新婚燕尔, 相亲相爱, 所以一定得同去一个地方。这对夫妻间的争执是一次非零和对策。假定他们的第一个策略都是去看戏, 第二个都是看足球赛。并且以Ⅰ代表丈夫, Ⅱ代表妻子, 则赢得矩阵可以是:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} \text{Ⅱ}_1 & \text{Ⅱ}_2 \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{Ⅰ}_1 \\ \text{Ⅰ}_2 \end{array} & \begin{pmatrix} (1, 4) & (0, 0) \\ (0, 0) & (4, 1) \end{pmatrix}
\end{array}
$$

° 本文于 1997 年 5 月 4 日收到

显然, 结局(Ⅰ$_2$, Ⅱ$_1$)与结局(Ⅰ$_1$, Ⅱ$_2$)对应于夫妻二人的赢得都为 0, 即哪里都不会去, 二人都不乐意, 但如果丈夫坚持看足球, 妻子就比丈夫少得 3, 反之如果妻子坚持看戏, 丈夫就比妻子少得 3。那么究竟二人该怎样对策。

如果在对策中Ⅰ采用混合策略 $X = (x, 1-x)$, Ⅱ采用 $Y = (y, 1-y)$, 则Ⅰ, Ⅱ的赢得分别为

$$e_1(x, y) = 5xy + 4 - 4x - 4y$$

$$e_2(x, y) = 5xy + 1 - x - y$$

由于 $0 < x, y < 1$, 所以赢得区域为图 1。

这是非合作型对策的赢得区域, 如果局中人合作, 则用投硬币的办法决定俩人都去剧院还是都去看足球赛, 即采用(Ⅰ$_1$, Ⅱ$_1$)和(Ⅰ$_2$, Ⅱ$_2$)的概率各为$\frac{1}{2}$, 平均赢得为$\frac{1}{2}(1, 4) + \frac{1}{2}(4, 1) = (2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$, 这个结果不在非合作型对策的赢得区域内。

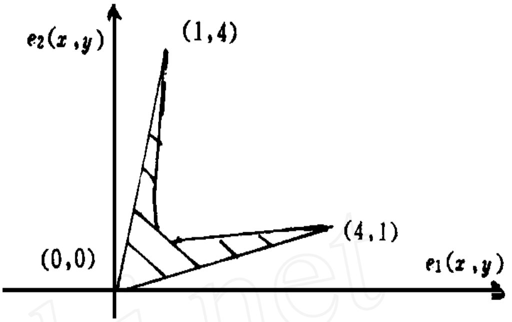

图 1

在合作型对策中, 由于可以采用联合的随机策略, 所以赢得区域要比非合作型对策大。如果非合作型对策的赢得是(u_1, v_1)和(u_2, v_2), 那么在合作型对策中, 通过采用联合策略, 以概率 α 选择赢得为(u_1, v_1)的策略, 以 $1-\alpha$ 的概率选择赢得为(u_2, v_2)的其它策略, 期望赢得将为

$$\alpha(u_1, v_1) + (1-\alpha)(u_2, v_2)$$

所以, 合作型对策的赢得区域 R 是非合作型对策赢得区域的凸闭包, 从而"夫妻争执"问题的合作赢得区域为图 2。

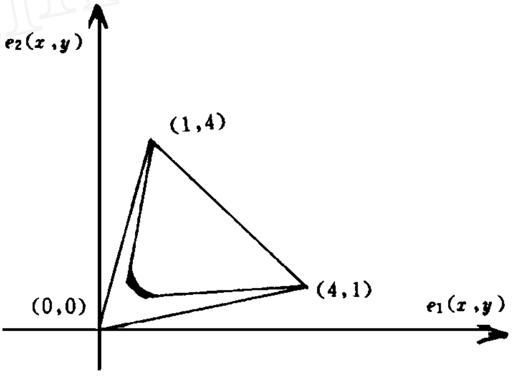

图 2

从图 2 可以看出, 区域的顶点正是纯策略的赢得。一般来说区域 R 的顶点总是双方都采用纯策略时的赢得, 然而并非所有纯策略对策的赢得都必定是在 R 的顶点上。根据这个特点, 要确定合作型对策的赢得区域 R, 第一步, 先标出局中人都采用纯策略时的赢得, 第二步, 以直线连接这些点, 连成的最大区域就是 R。

2.2　谈判集和协商集

一旦允许两位局中人合作, 对策的重心就从实施对策移到预先协商上来了。在合作型对策中, 局中人可能在哪个赢得上达成一致的协议呢?

为了回答这个问题, 我们引进下面的定义。

定义 1　在合作型对策中, 如果 $u' \geq u$, $v' \geq v$ 而且 $(u', v') \neq (u, v)$, 则称 (u, v) 被 (u', v') 共同优超。

定义 2　一对赢得 (u, v), 若不被任何其它赢得共同优超, 则称为帕利脱最优赢得。

显然, 对策的局中人只关心帕利脱最优赢得, 因为否则的话, 他们可进一步协商, 并至少能再使一人得到更多的赢得。另外, 局中人Ⅰ, Ⅱ都分别要使自己的赢得至少达到

$$V_{\text{I}} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} e_1(x, y)$$

$$V_{\text{II}} = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} e_2(x, y)$$

否则谈判便会破裂, 他们会不管对方各自采用最大最小策略。称

$$B = \{(u, v) \mid u \geq V_{\text{I}},\ v \geq V_{\text{II}},\ (u, v) \text{ 是 } R \text{ 中的帕利脱最优赢得}\}$$

为谈判集或协商集。

冯·诺伊曼和摩根斯特恩 1944 年曾指出, 合作型对策的任何解都必定是谈判集的一个子集。

2.3　最大最小谈判解

如何在 B 中选出最可能为局中人采纳的赢得呢? 由于有限合作型对策的赢得区域 R 总是闭的有界凸集, R 中有一个特殊点 $(u_0, v_0)\in R$, 称为现状点, 它是局中人不能达成协议时可以接受的结果。由此, 纳什提出了几条公理, 根据纳什谈判公理见文献[1], 双方选定了一致的现状点, 就可以求解对策。

选择现状点有个浅显的办法, 就是令 $u_0=V_{\mathrm{I}}$, $v_0=V_{\mathrm{II}}$, V_{I} 和 V_{II} 分别为局中人 Ⅰ 和 Ⅱ 的最大最小值, 即 Ⅰ 和 Ⅱ 可以各自确保得到的赢得, 为此人们把以纳什谈判公理得到的解称为最大最小谈判解。

例考虑下述矩阵

$$\begin{pmatrix} (1,2) & (8,3) \\ (4,4) & (2,2) \end{pmatrix}$$

第一步: 分别求解 Ⅰ, Ⅱ 的赢得组成的零和对策, 计算出 $V_{\mathrm{I}}, V_{\mathrm{II}}$, 这两个零的对策的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

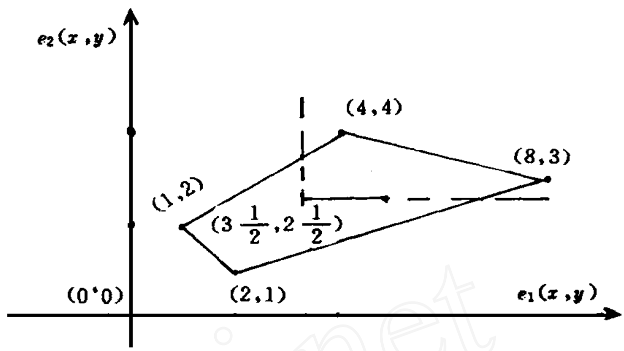

图 3

由 2×2 零和对策求解公式得　$V_{\mathrm{I}}=3\frac{1}{3}$, $V_{\mathrm{II}}=2\frac{1}{2}$。

第二步: 求协商集

作合作型对策的赢得区域 R

从图 3 可以看出协商集为

$$B=\{(u,v)\mid u+4v=20,\ 4\le u\le 8\}$$

即以 (4, 4), (8, 3) 为端点的线上的所有点作成的集合。

第三步: 根据纳什谈判公理, 最大最小谈判解一定在 B 中, 且使

$$f(u,v)=\left(u-3\frac{1}{3}\right)\left(v-2\frac{1}{2}\right)$$

达到最大。

解:

$$\max f(u,v)=\left(u-3\frac{1}{3}\right)\left(v-2\frac{1}{2}\right)$$
$$\text{s.t.}\quad u+4v=20\qquad 4\le u\le 8$$

得 $u=6\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{3}$

故有唯一的最大最小谈判解 $(6\frac{2}{3},\ v=3\frac{1}{3})$

3　实例分析

有两家公司, 公司 Ⅰ 每星期生产 200 台彩色电视机或者生产 100 台黑白电视机和 100 台彩色电视机; 公司 Ⅱ 每星期可以生产 50 台彩色电视机或 100 台黑白电视机。市场对彩电和黑白电视的需求量分别是 200 台/星期和 100 台/星期, 售价分别为每台 2000 元和每台 1000 元。公司 Ⅰ 的生产成本为: 彩电每台 1500 元, 黑白电视机每台 600 元。公司 Ⅱ 的生产成本为: 彩电每台 1600 元, 黑白电视机 850 元。如果生产大于需求, 两家公司将按照各自的产量在总产量中占有的比例确定售出量(例如假定 Ⅰ 生产 200 台彩电, 而 Ⅱ 生产 50 台, 需求量为 200 台, 则 Ⅰ 和 Ⅱ 的售出量分别为 $\frac{200}{250}\times200=160$ 台和 $\frac{200}{250}\times50=40$ 台)。电视机售不出

去, 公司便不仅得不到利润, 相反却仍要支出生产成本。现在我们将这个问题构成一个 2×2 非零和对策, 并求其解。

公司Ⅰ有两个策略:

Ⅰ$_1$: 生产 200 台彩电;

Ⅱ$_2$: 生产 100 台彩电, 100 台黑白电视机。

公司Ⅱ也有两个策略:

Ⅰ$_1$: 生产 50 台彩电;

Ⅱ$_2$: 生产 100 台黑白电视机。

此问题的赢得矩阵为:

$$\begin{pmatrix} (20000, 0) & (100000, 15000) \\ (90000, 20000) & (40000, -35000) \end{pmatrix}$$

这显然是一个 2×2 非零和对策。如果公司Ⅰ与公司Ⅱ不合作, 公司Ⅰ的最大最小值为 $V_{\mathrm{I}} = 63077$(元), 公司Ⅱ的最大最小值为 $V_{\mathrm{II}} = 4286$(元)。

若公司Ⅰ与公司Ⅱ合作, 则赢得区域为见图 4。

协商集为:

$$B = \left\{ (u, v) \,\middle|\, \frac{1}{2}u + v = 65000,\ 90000 \le u \le 100000 \right\}$$

解

$$f(u, v) = (u - 63077)(v - 4286)$$

$$\mathrm{s\ t}\quad \frac{1}{2}u + v = 65000,\ 90000 \le u \le 100000$$

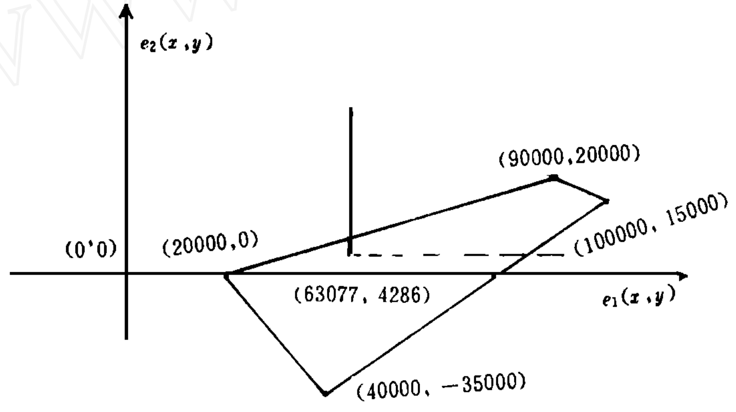

图 4

得最大最小谈判解为 (92253, 18874)。

从结果可以看出, 显然合作优于非合作, 只要二公司充分协商, 总能使他们的赢得都满意。

参 考 文 献

1　(英)L.C. 托马斯著. 对策论及其应用. 靳敏, 王辉青译. 北京: 解放军出版社, 1988

2　李树仁主编. 运筹学主要分支及其基本方法. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1990

3　周志成主编. 运筹学教程. 立信会计图书用品社出版, 1987