多目标离散控制: 一种对策方法*

卢子芳

(南京邮电学院一系, 江苏 南京 210003)

摘要　在多目标控制中, 线性加权法常常被用于把多目标问题转化为单目标问题的研究中。若各子目标与总体目标存在非凸关系时, 该方法难以有效。本文构造了一种对策模型来解决这类多目标控制问题, 提出了利用对策理论求解这类问题的方法。该方法可将决策人对目标的偏好加入模型中, 从而放宽了问题的凸性限制。

关键词　多目标离散控制　动态对策　线性二次型

Multiple Objective Discrete Control——A Game Method

Lu Zifang

(Department One, Nanjing University of Post & Telecom., Nanjing 210003)

Abstract　In multiple objective control fields, linear weighted method is often used to convert the multiple objective problem to the single objective problem. If nonconvex relation between total objective and its performance indices, the LWM is not effective. In this paper, the gaming model of the multiple objective control problem is built. The method solving the problem is presented by using dynamic game theory. The objective perforences of decision-maker is considered in the model, which helps to overcome the difficulty incurred by nonconvexity.

Keywords　multiple objective control; dynamic games; linear quadratic form

1　引言

现实世界中, 大多数控制系统的优化设计问题, 都包含着在多个互相依赖、互相冲突目标之间进行权衡的问题。目标之间相互依存的关系, 使得在设计系统控制器时, 不是只考虑某个目标最优, 而是在多个目标之间进行权衡, 寻求使决策者满意、总体目标最优的系统控制器。多目标控制问题应运而生。近年来, 多目标控制方面的研究成果颇多[1~4], 某些研究成果已应用于飞行器控制系统设计和工业过程控制等领域。然而, 大多目标控制问题研究中, 特别是推导线性控制系统相关性能时, 总体目标与各子目标之间凸性关系起着核心的作用。利用凸性关系和多目标线性加权法, 多目标控制问题可转化为单目标控制问题, 从而可用现有控制理论进行求解[5]。一旦现实中遇到的某些控制系统设计问题不存在这种凸性关系时, 采用多目标线性加权法求解时, 目标之间的相互补偿、相互抵消关系, 会使部分满意的非劣解丢失, 从而影响控制器的设计。为此, 很有必要寻找求解这类问题的方法。

对策理论研究具有各自目标的多个对策人之间竞争与平衡问题, 与多目标决策问题存在类同之处。若具有非凸性的多目标控制问题视为多个对策人进行对策的对策问题时, 多目标之间的权衡问题, 就转化为对策人进行对策, 寻找平衡点的过程。如此, 多目标控制问题可转化为一类信息完全的非零和动态对策问题。本文基于此展开研究, 并提出了求解这一问题的方法。

* 本文于 1997 年 10 月 14 日收到

2　多目标控制问题的模型描述

多目标离散控制问题可描述为如下模型:

$$(MO_1)\qquad \min_{u(\cdot)\in U} V(J^0(u(\cdot))) \tag{1.1}$$

$$\min_{u(\cdot)\in U} J_i^0(u(\cdot)) \qquad i=1,2,\cdots,m \tag{1.2}$$

$$\text{s.t.}\quad X(k+1)=A(k)X(k)+B(k)u(k) \quad k=1,\cdots,N \tag{1.3}$$

式中, $X(k)\in R^n$ 是系统状态向量; $u(k)\in R^q$ 是系统的控制向量; $A(k)$ 和 $B(k)$ 是合适维数的系统矩阵; U 是可允许控制域。$J(\cdot): U\to \mathbf{F}\in R^m$ 是 m 维向量, $\mathbf{F}$ 是目标向量取值域, 且 $J^0(\cdot)=(J_1^0(\cdot),\cdots,J_m^0(\cdot))$, 其中

$$J_i^0(u(k))=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\{X^T(k+1)\overline{Q_i}(k+1)X(k+1)+u^T(k)\overline{R_i}(k)u(k)\} \tag{1.4}$$

式中, $\overline{Q_i}(k+1)$ 和 $\overline{R_i}(k)$ 为合适维数矩阵, 且是正定矩阵, 在式(1.1)中, $V(\cdot): \mathbf{F}\to R$ 是可测映射, 反映了子目标与总体目标之间的关系。

定义 1　如一可行控制向量 $u^*(k)$ 是式(1)所示的多目标控制问题的非劣解, 那么不存在另一向量 $u(k)\in U$, 使得下式成立:

$$J_i^0(u(\cdot))\le J_i^0(u^*(\cdot)) \tag{2.1}$$

且存在 j

$$J_j^0(u(\cdot))=J_j^0(u^*(\cdot)) \tag{2.2}$$

若总体目标与子目标之间是凸性关系时, 可将多目标控制问题式(1)转化为如下单目标控制问题:

$$(MO_2)\qquad \text{目标}\quad J_0=\sum_{i=1}^{m} w_i J_i^0(\cdot) \tag{3.1}$$

$$\text{s.t.}\quad X(k+1)=A(k)X(k)+B(k)u(k) \quad k=1,\cdots,N \tag{3.2}$$

式中, w_i 是决策人对各个目标的重视程度, 它根据式(1.1)来确定。对于式(3.1)所示的多目标控制模型, 下列引理成立:

引理 1[3]　对于式(3)表示的多目标控制问题, 一定存在一个线性控制律。

若总体目标与各子目标之间存在非凸关系, 则目标 J_0 与原总体目标 $V(\cdot)$ 不一致。为了处理这种非凸关系, 将原模型 (MO_1) 转换为如下形式:

$$(MO_3)\qquad \text{总体目标}\quad \min V(J(u(\cdot))) \tag{4.1}$$

$$\text{子目标}\quad J_i=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Big\{\{X^T(k+1)\overline{Q_i}(k+1)X(k+1)+y_i^T(k)\overline{R_i}(k)y_i(k)\}+\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{M} M_{jk}(y_i(k)-y_j(k))^2\Big\} \quad i=1,2,\cdots,M \tag{4.2}$$

$$\text{约束}\quad X(k+1)=A(k)X(k)+B(k)y_i(k) \quad k=1,\cdots,N \tag{4.3}$$

$$y_i(k)=y_j(k) \quad j=1,\cdots,M;\quad j\ne i \tag{4.4}$$

式中, $y_i\in R^q$, $i=1,\cdots,M$; M_{jk} 是一非常大的正数, 它保证 $y_i(k)$ 与 $y_j(k)$ 等同。若将 M 个子目标视为 M 个虚拟决策人分别所有, 则多目标控制问题(式(4.2)～(4.4))将由单个决策人的多目标问题转化为多个虚拟决策人(以下简称对策人)的单目标对策问题, 从而转化为一类具有完全信息的多人非零和动态对策问题。又由于多目标问题无最优解, 只存在非劣解, 而线性二次型动态对策问题存在唯一平衡解, 为此需将总体目标对子目标的影响考虑进去, 从而形成如下动态对策模型:

$$(MO_4)\qquad \text{目标}\quad J_i=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Big\{w_i\{X^T(k+1)\overline{Q_i}(k+1)X(k+1)+y_i^T(k)\overline{R_i}(k)y_i(k)\}+\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{M} M_{jk}(y_i(k)-y_j(k))^2\Big\}$$

$$\text{约束}\quad X(k+1)=A(k)X(k)+B(k)y_i(k) \qquad i=1,2,\cdots,M$$

式中, $w=(w_1,\cdots,w_M)^T$ 为多目标决策人对第 i 个子目标的重视程度(或偏好), w 的值由总体目标确定。随

着 w 值改变, 由 M 个对策人构成的动态问题的平衡解也将随之改变, 因而求得多个平衡策略。因而可由决策人依据总体目标和各子目标的期望水平选取满意的平衡策略。

为了研究上的方便, 不失一般性, 在这里我们仅考虑两个目标的线性二次型控制问题。由上面讨论, 参照模型 (MO$_4$) 可得如下的动态对策问题模型 (MO$_5$):

(MO$_5$)

对策人 DM$_1$:

目标
$$\min J_1(u(\cdot),w_1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Big\{w_1\{X^T(k+1)\overline{Q}_1(k+1)X(k+1)+u^T(k)\overline{R}_1(k)u(k)\} + M_{1k}(u(k)-y(k))^2\Big\} \tag{5.1}$$

约束
$$X(k+1)=A(k)X(k)+B(k)u(k)\quad k=1,\cdots,N \tag{5.2}$$

对策人 DM$_2$:

$$\min J_2(u(\cdot),w_2)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Big\{w_2\{X^T(k+1)\overline{Q}_2(k+1)X(k+1)+\overline{y}(k)\overline{R}_2(k)y(k)\} + M_{2k}(y(k)-u(k))^2\Big\} \tag{5.3}$$

约束
$$X(k+1)=A(k)X(k)+B(k)y(k)\quad k=1,2,\cdots,N \tag{5.4}$$

则两对策人将依据由总体目标确定的偏好 $w=(w_1,w_2)^T$ 选择各自的策略, 从而选择其平衡解. 如此, 有以下定义:

定义 2 若 u^N 和 y^N 是式(5)构成的动态对策问题的 Nash 平衡解, 则 u^N 和 y^N 满足下式:

$$J_1(u,y^N)\geq J_1(u^N,y^N) \tag{6.1}$$

$$J_2(u^N,y)\geq J_2(u^N,y^N) \tag{6.2}$$

式中, $J_1(u,y^N)\triangleq J_1(u,w_1)$; $J_2(u,y)\triangleq J_2(u,w_2)$; $u=(u(1),\cdots,u(N))^T$; $y=(y(1),\cdots,y(N))^T$。根据动态对策理论, 对于动态对策模型 (MO$_5$), 下列定理成立:

定理 1 对于式(5)所示的线性二次型两人非零和动态对策问题, 如果存在合适维数的矩阵 $D_i(k+1)$、$E_i(k+1)$ 和 $P_i(k)$, 且 $D_i(k+1)$ 和 $E_i(k+1)$ 可逆, $i=1,2$; 则一定存在唯一的闭环 Nash 平衡解, 且解满足下式:

$$u^N(k)=-E_1(k+1)[D_1(k+1)B(k)P_1(k+1)A(k) + M_{1k}D_1(k+1)D_2(k+1)B^T(k)P_2(k+1)A(k)]X^N(k) \tag{7.1}$$

$$y^N(k)=-E_2(k+1)[D_2(k+1)B(k)P_2(k+1)A(k) + M_{2k}D_2(k+1)D_1(k+1)B^T(k)P_1(k+1)A(k)]X^N(k) \tag{7.2}$$

$$D_1(k+1)=(w_1\overline{R}(k)+M_{1k}I_q+P_1(k+1)B(k))^{-1} \tag{7.3}$$

$$D_2(k+1)=(w_2\overline{R}(k)+M_{2k}I_q+P_2(k+1)B(k))^{-1} \tag{7.4}$$

$$E_1(k+1)=(I-M_{1k}M_{2k}D_1(k+1)D_2(k+1))^{-1} \tag{7.5}$$

$$E_2(k+1)=(I-M_{1k}M_{2k}D_2(k+1)D_1(k+1))^{-1} \tag{7.6}$$

$$P_1(k)=[w_1A^T(k)\overline{Q}_1(k+1)+A^T(k)P_1(k+1)]\{A(k)-B(k)E_1(k+1)[D_1(k+1)B^T(k)P_1(k+1)A(k) + M_{1k}D_1(k+1)D_2(k+1)B^T(k)P_2(k+1)A(k)]\} \tag{7.7}$$

$$P_2(k)=[w_2A^T(k)\overline{Q}_2(k+1)+A^T(k)P_2(k+1)]\{A(k)-B(k)E_2(k+1)[D_2(k+1)B^T(k)P_2(k+1)A(k) + M_{2k}D_2(k+1)D_1(k+1)B^T(k)P_1(k+1)A(k)]\} \tag{7.8}$$

$$X^N(k+1)=A(k)X^N(k)+B(k)u^N(k) \tag{7.9}$$

$$X^N(k+1)=A(k)X^N(k)+B(k)y^N(k) \tag{7.10}$$

证明 由动态规划原理及定义 3 可以求得, 由于繁琐, 此处略去。

由定理 1 可以推知, 对于给定的权值 w, 式(5.2)～式(5.5)表示的多目标控制问题, 一定存在一个线

性控制律; 若权值 w 改变, 控制律呈非线性变化。对于给定的权 w, 由式(7)可以求得控制变量 u^N 和 y^N, 若使得 $u^N \equiv y^N$, 则必须修正 M_{ik}　$i=1,2$, 由目标函数(5.2)和(5.4)得:

$$M_{ik}^{(l+1)} = M_{ik}^{(l)} + \lambda_i(u)u(k) - y(k))^2 \quad i=1,2;\ l=1,2,\cdots \tag{8}$$

式中, λ_i 为步长。w 值的确定可由式(4.1)得。

3　多目标控制问题求解、算法

由前面的讨论可知, 多目标离散控制问题可转化为动态对策问题。每个对策人利用所给的权值和自己的目标, 用定理 1 求得平衡解; 为使对策平衡解一致, 逐步增大惩罚系数 M_{ik}, 直至一致为此。根据总体目标或对各个目标的期望值修正权重。由此算法如下:

1) 随机给出各目标权重 w 和各目标期望值;

2) 任意给值 (u, y) 和 M_{ik}, $i=1,2$; $k=1,\cdots,N$;

3) 按式(7)求得对策平衡解 (u^N, y^N);

4) 判断 $\| u^N - y^N \| \le \epsilon$, ϵ 是给定的正小数, 若成立, 则转 5); 否则, 按式(8)修正 M_{ik}, 转 3);

5) 计算两个目标值, 若目标值已满足决策人的总体目标或子目标期望值, 则输出计算结果; 否则, 按照总体目标或子目标期望值修正权值 w, 转 2)。

4　算例

有一多目标离散控制问题的模型如下:

总体目标

$$\min J = J_1^0 / J_2^0 \tag{9.1}$$

分目标

$$\begin{cases} \min J_1^0 = \dfrac{1}{2}X^2(3) + \dfrac{1}{2}\{2X^2(2) + X^2(1) + u_1^2(1) + 3u_1^2(2) + 2u_2^2(1) + u_2^2(2)\} \\ \min J_2^0 = \dfrac{3}{2}X^2(3) + \dfrac{1}{2}\{X^2(2) + 4X^2(1) + u_1^2(1) + 2u_1^2(2) + u_2^2(1) + 3u_2^2(2)\} \end{cases} \tag{9.2}$$

$$\text{s.t.}\quad X(k+1) = X(k) + u_1(k) - 3u_2(k) \quad X(1) = 1 \quad k = 1,2 \tag{9.3}$$

根据前面的研究, 将式(9)转划为如下模型

(MO$_6$)

总目标

$$\min J(w) = \frac{J_1(w)}{J_2(w)} \tag{10}$$

子系统 1:

目标

$$\min J_1 = wJ_1^0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} M_{1k}(u_1(k) - y_1(k))^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} L_{1k}(u_2(k) + y_2(k))^2$$

$$J_1^0 = \frac{1}{2}X^2(3) + X^2(2) + \frac{1}{2}X^2(1) + \frac{1}{2}u_1^2(1) + \frac{3}{2}u_1^2(2) + u_2^2(1) + \frac{1}{2}u_2^2(2) \tag{11.1}$$

约束

$$X(k+1) = X(k) + u_1(k) - 3u_2(k) \quad X(1) = 1,\ k = 1,2 \tag{11.2}$$

子系统 2

目标

$$\min J_2 = J_2' + \sum_{k=1}^{2}\frac{M_{2k}}{2}(y_1(k) - u_1(k))^2 + \sum_{k=1}^{2}\frac{L_{2k}}{2}(y_2(k) - u_2(k))^2 \tag{11.3}$$

约束

$$X(k+1) = X(k) + y_1(k) - 3y_2(k) \quad X(1) = 1,\ k = 1,2 \tag{11.4}$$

式中, $J_2' = \frac{1}{2}\{3X^2(3) + X^2(2) + 4X^2(1) + y_1^2(1) + 2y_1^2(2) + y_2^2(1) + 3y_2^2(2)\}$。

选择初值如下:

$M_{1k} = 900$, $M_{2k} = 300$, $L_{1k} = 800$, $L_{2k} = 400$, $k = 1, 2$; $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 2$; $u_1(k) = u_2(k) = 0.22$, $y_1(k) = y_2(k) = +10$, 则计算结果如表 1 所示。目标值与权重变化关系如图 1 所示。由表 1 可知最佳目标值为 $J = 0.2892$, 此时权重为 $w_1 = 8$, $w_2 = 1$, 相应的控制变量、状态量及目标值为 $u_1(\cdot) = (-0.3173, -0.0032)$, $u_2(\cdot) = (0.2130, 0.0320)$, $X(\cdot) = (1, 0.0434, -0.0558)$, $(J_1, J_2) = (0.5996, 2.0735)$。

表 1 计算结果

权重	控制变量				状态变量		目标值		
w	$u_1(1)$	$u_1(2)$	$u_2(1)$	$u_2(2)$	$X(2)$	$X(3)$	J_1^0	J_2^0	J
100	-1.2369	-0.0091	-0.1663	0.1066	0.2621	-0.0668	1.5916	2.8345	0.5615
40	-0.1672	-0.0135	0.1816	0.1138	0.2879	-0.0671	0.7179	2.0938	0.3429
10	-0.2883	-0.008	0.2031	0.051	0.1023	-0.058	0.6009	2.0701	0.2903
8	-0.3173	-0.0032	0.2130	0.0320	0.0434	-0.0558	0.5996	2.0735	0.2892*
6	-0.3625	-0.0040	0.2281	0.0034	-0.0469	-0.0531	0.6168	2.0898	0.2951
3	-0.5004	0.0272	0.2774	-0.0846	-0.3327	-0.0517	0.8085	2.226	0.3632
1	-0.5899	0.0978	0.4587	-0.2588	-0.9661	-0.0918	1.8567	2.8607	0.6490
0.125	-0.1433	0.2417	0.8765	-0.5206	-1.829	-0.0223	4.8465	4.5372	1.0682
0.1	-0.0399	0.2511	0.9441	-0.5344	-1.8725	-0.018	5.0992	4.6763	1.0904
0.025	-0.0033	0.2854	1.0069	-0.5757	-2.0175	-0.0048	5.8309	5.10	1.1433

注: * 为总体最优值

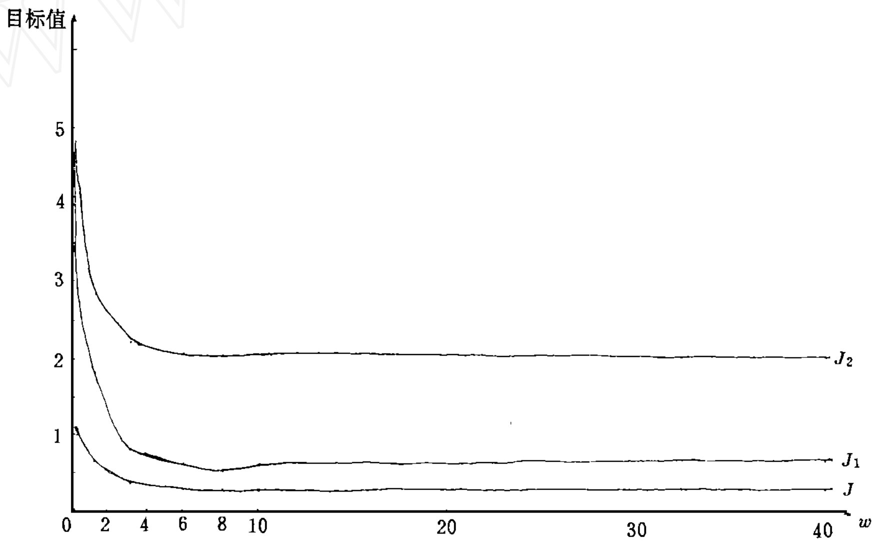

图 1 目标值与权重变化关系图

5 结论

本文以线性二次型多目标离散控制问题为背景, 研究了总体目标与各子目标非凸情况下控制策略的

求解问题, 提出了利用动态对策理论求解的方法。该方法不仅应用于非凸情形, 也可应用于凸性情形, 且对目标的重视程度选择有指导作用。文中针对两个目标情形研究, 但研究结果容易推广到多目标控制问题的研究中。

参 考 文 献

1 Li Duan. On the minimax solution of multiple linear quadratic problems. IEEE Trans Auto. Control, 1990, 35(10): 1153～1156

2 Knargoneker P P & Rotera M A. Multiple objective optimal control of linear systems: the quadratic norm case. IEEE Trans Auto. Control, 1991, 36(10): 14～24

3 Li Duan. On general multiple linear quadratic control problem. IEEE Trans Auto Control 1993, 38(11): 1722～1727

4 Gomide F A and Cardarelli T. Large scale systems with multiple objectives: an interactive negotiation procedure, Automatica, 1991, 27(4): 691～697

5 Carvalho J R H & Ferreira P A V. Multiple criterion Control: a convex programming approach. Automatica, 1995, 31(7): 1075～1029

(上接第 7 页)

6 Klir G J. Applied General Systems Research (Recent Development and Trends). Plenum Press, New York, 1978

7 Mesarovic M D, Macko D and Takahara Y. Theory of Hierarchical, Multilevel Systems. Academic Press, New York, 1970

8 Mesarovic M D. Views on General Systems Theory. John Wiley, New York, 1964

9 Mesarovic M D and Takahara Y. General Systems Theory ——Mathematical Foundation. Academic Press, New York, 1975

10 Miller J G. Living Systems, Mc Graw-Hill, New York, 1978

11 Rapoport A. General System Theory (Essential Concepts & Applications), ABACUS Press, UK, 1986

12 林福永, 吴健中. 一般系统结构理论及其应用(I). 系统工程学报, 1997, 12(3): 1～10