不确定性决策中完全信息获得的事前分析[◦]

赵恒峰　邱菀华　韩丽敏

(北京航空航天大学管理学院, 北京 100083)

摘要　明确了规范决策分析中信息的概念, 介绍了信息获得与否的价值判断法。然后主要针对不确定性决策完全信息获得的事前分析进行了讨论, 给出了单状态完全信息获得的概念和一个实际分析例子; 同时对完全信息与风险态度的关系进行了简单的分析。

关键词　完全信息获得　单状态完全信息获得　不确定性决策

The ex-ante Analysis of Perfect Information Acquiring in Decision Making under Uncertainty

Zhao Hengfeng　Qiu Wanhua　Han Limin

(School of Management, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

Abstract　The paper clarifies the meaning of perfect and complete information in normative decision analyzing model and introduces the information acquiring decision method in which expected value of various information is used. The ex-ante analysis of perfect information acquiring in decision making under uncertainty is discussed mainly. The concept of the perfect information of single state acquiring is introduced and an example is given. The relation between the perfect information and risk-attitude is discussed briefly.

Keywords　perfect information; perfect information of single-state; decision making under uncertainty

1　引言

决策是以信息为基础的, 在规范决策分析中, 决策信息一般指状态空间的概率信息, 而决策信息价值的研究也主要局限于贝叶斯决策问题中, 通过期望信息价值 EVSI(Expected Value of Sampling Information) 和净期望信息收益 ENGSI(Expected Net Gain from Sampling Information) 来判别信息是否获得, 但是这一方法只能对信息获得进行事后分析, 不能对信息进行事前分析。下面我们就不确定决策中的完全信息获得进行事前分析。

2　决策与信息的基本概念

2.1　决策分析的一般模型

规范决策问题由状态空间 Θ, 行动空间 A 和支付空间 X 组成, 即决策问题 $G=\{\Theta, A, X\}$, 其中 $A=\{a_1, a_2, ..., a_m\}$, 由 m 个行动组成, $\Theta=\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n\}$ 由 n 个状态组成, 支付空间 $X=(x_{ij})_{m\times n}$, x_{ij} 由 $a_i\in A$ 和 $\theta_j\in\Theta$ 决定, 当 $x_{ij}>0$ 时表示收益, $x_{ij}<0$ 表示损失。决策问题的矩阵表示如表 1 所示。

若决策者对状态空间 Θ 的信息完全了解, 称为确定型决策问题; 对 Θ 的信息部分了解, 称为风险型决

◦　本文于 1997 年 7 月 2 日收到

策问题; 对 Θ的信息没有了解, 称为不确定型决策。这样定义不是十分明确, 下面我们将用信息的概念对决策类型进行精确的描述。

2.2　决策中信息的基本概念

信息的概念要比人们普遍认为的复杂的多, 在不同的领域其含义不同。在规范决策分析中的信息是指关于状态空间的信息, 即对于状态空间概率的信息。

表 1　规范决策矩阵

A \ Θ	θ_1	θ_2	…	θ_j	…	θ_n
a_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}
a_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2n}
⋮			⋮	⋮		
a_m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mj}	…	x_{mn}

定义 1　对表 1 所示的规范决策问题, 如果决策者准确知道那一个状态发生则称信息是完全的或完美的; 如果决策者知道状态空间的概率分布则称信息是完整的, 如果决策者不知道概率分布但知道一些关于分布的信息则称信息是不完整的; 如果决策者对状态的信息一点都不知道则称信息是未知的。

在决策分析中完美信息(perfect information)和完全信息(complete information)没有严格的区别, 但在博弈论中这两个概念的意义是不同的[5], 本文对这两个概念等同使用; 完整信息的概念在文献[4]中有详细的介绍, 其中英文表达用的也是“complete information”, 不完整信息英文用“incomplete information”表达。本文用“perfect information”表示完美信息和完全信息。

从决策信息的角度严格定义的决策类型如下: 在规范决策分析中, 当决策者拥有完全信息时称为确定性决策; 当决策者拥有完整信息或不完整信息时称为风险决策; 当决策者对状态信息一无所知时是不确定性决策。

3　完全信息获得的判别

3.1　信息获得的价值分析判别法

在决策分析中一个重要的问题是对于获取信息与否的判断: 当决策者通过支付成本而可以获得新的决策信息时, 如何判断是否值得获得信息? 在统计决策理论中对这一问题的决策方法主要是: 通过计算获得信息前与获得信息后的收益比较计算信息价值, 当信息成本大于 0 时, 再计算信息获得的净收益, 决定是否获得信息(Gregory (1988), pp. 157～180)。

对于完全信息的获得与否的判别也用这一方法, 其根据是信息获得前并不知道具体哪一个状态发生, 因此信息获得前的决策问题的性质不变, 风险决策仍然是风险决策, 只是增加了一个获得完全信息的行动 a_0, 如表 2 所示。这时决策仍需通过期望收益准则来决策。

表 2　完全信息系统的全状态信息获得行为的决策问题

A \ Θ	θ_1	θ_2	…	θ_j	…	θ_n
a_0	$\max_i x_{i1}$	$\max_i x_{i2}$	…	$\max_i x_{ij}$	…	$\max_i x_{in}$
a_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}
a_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2n}
⋮			⋮	⋮		
a_m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mj}	…	x_{mn}

对于风险型决策问题, 没有完全信息时, 按照期望值法则, 最优行动的期望收益(expected value)为

$$EV_{\max} = \max_i \sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} \quad (1)$$

而取得完全信息后的期望收益 EVUC (expected value under certainty)为

$$EVUC = \sum_{j=1}^{n} p_j \max_i x_{ij} \quad (2)$$

因此完全信息期望收益 EVPI(expected value of perfect information)为

$$EVPI = EV_{\max} - EVUC = \sum_{j=1}^{n} p_j \max_i x_{ij} - \max_i \sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} \quad (3)$$

EVPI 的另一种计算方法是利用机会成本, 根据上面 EVPI 的定义

$$\mathrm{EVPI} = \sum_{j=1}^{n} p_j \max_i x_{ij} - \max_i \sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} = \min_i \sum_{j=1}^{n} p_j (\max_i x_{ij} - p_j x_{ij}) = \min_i \sum_{j=1}^{n} p_j s_{ij} \tag{4}$$

其中 $s_{ij} = (\max_i x_{ij} - p_j x_{ij})$ 表示决策者没有采取最优行动的机会成本。

通过 EVPI 判断信息是否获得, 若信息获得的成本高于 EVPI, 则没必要进行完全信息获得, 对于不确定性决策, 可以用相同的方法分析, 只是决策准则不同, 这里不再详述。

信息价值法只能用于信息获得的事后分析, 即在得到了信息后分析其价值, 而且在分析不确定性决策的完全信息获得时也与实际决策行为不一致: 因为完全信息获得改变了决策者的行为, 即使 EVPI< 0, 但当决策者知道了状态 θ 发生, 他还会选择 Θ/θ 所决定的行动吗? 理性的决策者显然不会的。下面主要就不确定性决策进行完全信息获得的事前讨论。

3.2 完全信息事前获得的一般特性

定理 1 a) 可以获得完全信息的规范决策的风险损失不大于信息获得成本;

b) 获得完全信息后的决策的机会损失等于零。

证明 a) 因为当决策者获得完全信息后, 决策问题变成一个确定性问题, 假设状态 θ_j 发生, 则决策者将选择满足 $\min_i x_{ij}$ 的行动 a_i, 假设获得信息行为的费用为 C, 则当 $x_{ij} < -C$ 时, 决策者不会选择 θ_j 状态下的任何一个行动, 所以, 在完全信息系统下, C 是决策的最大可能风险损失。

b) 因为获得完全信息后, 决策已经成为一个确定性问题, 假设状态 θ_j 发生, 故决策者将选择满足 $\max_i x_{ij}$ 的行动 a_i, 此时机会成本 $s_{ij} = \max_i x_{ij} - x_{ij} = 0$。

定理 1 说明了决策者追求完全信息的根本原因: 信息可以限制决策者的风险损失, 而且获得信息后的决策行为不会造成后悔。

3.3 不确定性决策的完全信息事前获得

在决策者获得完全信息后, 不确定性决策的哪一个状态发生已经确切知道, 这时决策成为一个确定性问题, 对于不同的决策准则, 信息获得对决策的影响是不同的。下面我们就不确定性决策的 5 种决策准则分析完全信息对决策结果的影响。

定理 2 对于表 1 所示的决策问题, 用最大最小法则进行决策, 则完全信息的获得不会使决策结果更差。

证明 设获得的完全信息是状态 θ_j 发生, 即 $p_j = 1$ 时, 此时的决策结果是 $\max_i x_{ij}$; 获得信息前的决策结果是 $\max_i \min_j x_{ij}$, 因为 $\max_i x_{ij} \geq \max_i \min_j x_{ij}$, 故定理得证。

定理 2 说明用最大最小法则决策, 决策者不会为完全信息支付任何费用, 因为决策者不论哪一个状态空间发生其决策结果不会更糟。

定理 3 对于表 1 所示的决策问题, 用最大最大法则进行决策, 则完全信息的获得不会使决策结果更好。 (证略)

定理 3 说明用最大最大法则决策, 决策者也不会为完全信息支付费用, 因为信息不会改善决策者的结果, 相反总是降低决策者的收益, 因此对决策者来说没有意义。

从定理 2 和定理 3 中可以看到一个有趣的、看似矛盾的现象: 极端乐观者 (喜好风险者) 和极端悲观者 (厌恶风险者) 对于信息的态度是相同的, 即都不追求信息。但是二者的动机不同: 极端悲观者是因为认为没有必要再化"冤枉钱", 而乐观者是认为风险更有价值。

定理 4 对于表 1 所示的决策问题, 根据乐观系数法则 (Hurwitz 法则), 即根据决策函数 $f(a_i) = \lambda \max_j x_{ij} + (1-\lambda) \min_j x_{ij}$ 进行决策, 其中 $\lambda \in [0, 1]$, 设

$$\Theta_1 = \{\theta_{j1-i} \mid \theta_{j1-i} \text{ 是} \max_j x_{ij} \text{ 所确定的状态}, i = 1, \cdots, m\}$$

$$= \{\theta_{j2-i} \mid \theta_{j2-i} \text{ 是} \max_j x_{ij} \text{ 所确定的状态}, i = 1, \cdots m\}$$

其中 $(\Theta_1 \cup \Theta_2) \subseteq \Theta$,

则 Ⅰ) 状态子空间 $\Theta_1 \setminus (\Theta_1 \cap \Theta_2)$ 的完全信息获得①, 不会使决策结果更差;

Ⅱ) 状态子空间 $\Theta_2 \setminus (\Theta_1 \cap \Theta_2)$ 的完全信息获得, 不会使决策结果更好;

Ⅲ) 状态子空间 $\Theta \setminus (\Theta_1 \cup \Theta_2)$ 的完全信息获得, 对决策结果没有影响;

Ⅳ) 状态子空间 $\Theta_1 \cup \Theta_2$ 的完全信息获得, 对决策的影响不能事前确定。

(证略)

上面三个法则称为乐观- 悲观法则, 简单的总结可以发现完全信息与风险之间的关系: 对悲观状态的信息获得行为常常能够改善决策值, 对乐观状态的信息获得行为一般将降低决策值, 这说明悲观决策者一般总是低估实际决策状态, 而乐观决策者总是高估实际决策状态; 另一方面, 由于乐观决策的信息获得行为常常降低决策值, 故决策者一般对信息获得行为不感兴趣, 这说明他们是喜好风险的。

在开始讨论以前, 我们先定义一个对下面的分析有用的概念。

定义 2　对于表 1 所示的规范决策问题, 若状态空间 Θ 中的状态 θ_k 满足

$$x_{ik} \le x_{ij}, \quad j = 1, 2, \cdots, n \text{ 但 } j \ne k \tag{6}$$

对所有的 $i = 1, 2, \cdots, m$ 成立, 我们称 θ_k 为决策状态空间的劣态, 若(1) 存在严格不等式, 称 θ_k 为严格劣态; 相反, 若状态空间 Θ 中存在状态 θ_l 满足

$$x_{il} \ge x_{ij}, \quad j = 1, 2, \cdots, n \text{ 但 } j \ne l \tag{7}$$

对所有的 $i = 1, 2, \cdots, m$ 成立, 我们称 θ_l 为决策状态空间的优态, 若(2) 存在严格不等式, 称 θ_l 为严格优态; 若 θ_j 既不是优态, 也不是劣态, 称为决策状态空间的非优非劣态; 优态形成的集合用 $\overline{\Theta}$ 表示, 劣态形成的集合用 $\underline{\Theta}$ 表示。

定理 5　对表 1 所示的决策问题, 用等概率法则(Laplace 法则) 进行决策, 完全信息的获得对于决策结果的影响是不定的; 若子状态空间 $\overline{\Theta}$ 和 $\underline{\Theta}$ 非空, 则关于 $\overline{\Theta}$ 的完全信息获得不会使决策结果更差, 关于 $\underline{\Theta}$ 的完全信息的获得不会使决策结果更好。　(证略)

等概率准则考虑了所有的状态, 除非存在极端劣态和优态, 完全信息对决策的影响是无法判定的。由于决策者对风险的态度没有明显的倾向, 故对信息的追求也不存在倾向性。

定理 6　对表 1 所示的决策问题, 根据最小最大后悔值法则决策, 即用函数 $f(a_i) = \max_j (\max_k x_{kj} - x_{ij}) = \max_j s_{ij}$ 进行决策, 设产生最优决策值 $f^*(a_i^*) = \min_i f(a_i)$ 的状态为 θ_j, 则对于状态 θ_j 不发生的完全信息, 信息获得后的最优决策值不优于信息获得前的最优决策值, 其它情况的完全信息对决策的影响不能确定。

(证略)

由于最小最大后悔值法则的决策值与风险无关, 故虽然决策取的是最小值, 但决策者仍然厌恶信息, 这说明后悔值与风险的关系是反比的, 即冒风险的决策者不易后悔, 而易后悔的决策者不愿意冒风险。

3.4　只对一个状态进行完全信息获得

在实际决策中还会遇到这种情况, 即决策者可以对一个确定的状态获得其完全信息, 如对于状态 θ_j, 可以通过支付成本知道 $p_j = 1$ 还是 $p_j = 0$, 我们称这种信息获得为单状态完全信息获得。这种例子在实际中是很常见的, 例如市场状态 $\Theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n)$ 有 n 种可能, 在一个特定的短期内, 假设市场状态只有一种可能, 即使决策者可以通过调查了解哪一个状态发生, 但有时没必要, 它只需知道对其生产最有影响的状态 θ_i 是否发生即可(这时他的信息成本或许低一些)。

对于单状态完全信息获得, 其分析原理与上面相同, 但为了在不同状态信息间进行比较, 我们可以作一个合理的假设: 当 $p_j = 1$ 时, 不同状态 θ_j 的完全信息无差别。这一假设的含义是所有的确定性决策对于决策者是无差别的。利用这一假设, 我们只需研究当 $p_j = 0$ 时信息对于决策的影响, 限于篇幅不再给出单状态完全信息获得在不同决策准则下对决策的影响, 其结果与上面的类似, 下面给出一个单状态信息获得的例子。

① 子空间的完全信息不包括 $p = (0, ..., 0)$, 即该子空间内任何一个状态都不发生不是其完全信息。

4 单状态完全信息获得的例子

决策问题如表 3 所示。

表 3 给出了决策问题的一个先验主观概率, 并求出了不同方案的期望收益, 其中 a_0 是完全信息获得行为, 表中数据根据信息获得行为成本 $C=10$ 计算。

表 4 是对表 3 的状态 θ_1 进行的信息获得行为和决策问题无信息获得行为的一个比较, 状态空间的先验概率 P 为未知, 列出了 4 种决策准则下的决策结果及信息获得后的最优决策值的变化。

表 3 实例决策矩阵

A \ Θ	θ_1	θ_2	θ_3	$E(a_i)$
	$p_1=0.1$	$p_2=0.4$	$p_3=0.5$	
a_0	-10	10	10	8
a_1	-10	0	20	9
a_2	0	5	12	8
a_3	-15	20	10	11.5

表 4 单状态完全信息获得行为与不进行信息获得行为的比较

决策准则	$P\theta_1=(0, p_2, p_3)$	$P=(p_1, p_2, p_3)$ 未知	$P\to P\theta_1$ 最优决策值的变化
	决策结果		
最大最小	a_3	a_2	增大
最大最大	a_1 a_3	a_1 a_3	不变
Laplace	a_3	a_2	增大
最小最大后悔值	a_2	a_2 a_3	不变

$p_1=1$ 时, 决策方案为 a_2, 决策变为确定性, 决策结果无差别。当一个决策问题的结果空间已知后, 可以对信息获得费用的阈值和灵敏度进行分析。对于乐观系数准则, 可以就不同的 $\lambda\in[0,1]$进行讨论, 这里限于篇幅未列入表中。

5 结论

本文研究了完全信息获得的事前分析问题, 针对不确定性决策分析给出了完全信息对决策的影响, 从而得出决策者获得完全信息的条件, 即决策者在什么情况下才会决定获得信息; 在讨论中可以看出信息与风险态度的内在关系; 对于单状态信息的获得也是一个有意义的问题。

参 考 文 献

1 陈珽编著. 决策分析. 北京: 科学出版社, 1987

2 翟立林, 张庆洪编著. 应用决策分析. 上海: 同济大学出版社, 1994

3 Gregory, Geoffrey. Decision Analysis, Pitman Publishing, 128 Long Acre London WC2E 9AN, 1988

4 张瑞清. 不完整信息下决策分析的理论与应用研究. 北航管理学院博士学位论文, 1995

5 张维迎著. 博弈论与信息经济学. 上海: 上海三联书店、上海人民出版社联合出版, 1996