线性定常模糊随机系统的响应分析*

胡良剑　吴让泉　邵世煌

(中国纺织大学基础部, 上海 200051)

摘要　证明了线性定常模糊随机系统的输出在均方意义下的收敛性, 并给出了系统响应的模糊概率特征关系方程。

关键词　模糊随机向量　模糊随机系统　响应　均方收敛

The Response Analysis of Linear Time Invariant Fuzzy Stochastic Systems

Hu Liangjian　Wu Rangquan　Shao Shihuang

(China Textile University, Shanghai 200051)

Abstract　This paper proves mean square convergence of the output of linear time invariant fuzzy stochastic systems. Some response equation with regard to fuzzy probability characteristics are also derived.

Keywords　fuzzy random vector; fuzzy stochastic system; response; mean square convergence

1　引言

文献[1～3]首次提出了同时受到模糊性和随机性干扰的动力系统——模糊随机系统的概念, 并分析了它的各种表示形式以及它与确定性系统、随机系统和模糊系统之间的关系。遗憾的是, 它们没有给出有关收敛性的意义, 也没有研究输入与输出之间的特征关系, 在文献[4]中我们研究了模糊随机变量序列的均方收敛性。本文在进一步研究模糊随机向量序列均方收敛性的基础上证明了模糊随机过程作为系统输入时输出在均方意义下的收敛性, 并导出了输入输出之间的模糊概率特征关系方程, 从而推广了经典的随机系统理论的若干结果(参见文献[5])。

2　模糊随机向量的均方收敛性

设 R 为实数域, 称非空有界闭区间

$$A = [a, b]$$

为闭区间数, 其中 a 和 b 分别称为 A 的下端和上端, 记为 A^- 和 A^+。用 $I(R)$ 表示 R 上闭区间数全体。

设 $u: R \to [0, 1]$ 为一模糊集。称

$$[u]_\alpha = \begin{cases} \mathrm{cl}\{x \in R \mid u(x) > 0\} & 当\ \alpha = 0 \\ \{x \in R \mid u(x) \geq \alpha\} & 当\ 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

为 u 的 α 水平集。若对任意 $\alpha \in [0, 1]$, $[u]_\alpha \in I(R)$, 则称 u 为有限闭模糊数, 简称模糊数。用 $\mathbf{F}_*(R)$ 表示模糊数全体。

* 本文于 1997 年 6 月 16 日收到

任意 $u, v \in \mathbf{F}_*(R)$, 称

$$d(u,v) = \sup_{0\le\alpha\le 1} d_H([u]_\alpha, [v]_\alpha)$$

为 u 与 v 的距离。其中 d_H 为 Hausdorff 距离。显然对任意 $A, B \in I(R)$,

$$d_H(A, B) = \max\{|A^- - B^-|, |A^+ - B^+|\}.$$

根据文献[6], $(\mathbf{F}_*(R), d)$ 为一完备的距离空间。

任意 $u \in \mathbf{F}_*(R)$, 称

$$\| u \| = d(u, \chi_{\{0\}})$$

为 u 的范数。这里 χ 表示特征函数。显然有

$$\| u \| = \max\{ |[u]_0^+|, |[u]_0^-| \}$$

并且对任意 $u, v \in \mathbf{F}_*(R)$,

$$\| uv \| = \| u \| \| v \|. \tag{1}$$

设 $u_{ij} \in \mathbf{F}_*(R)$, $i = 1, 2, \cdots, m$; $j = 1, 2, \cdots, n$。称

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \vdots & \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{pmatrix}$$

为 m 行 n 列模糊矩阵, 特别地当 $n = 1$ 时, 称 u 为 m 维模糊向量; 当 $m = n$ 时, 称为 n 阶模糊方阵, 并称 $\sum_{i=1}^{n} u_{ii}$ 为 U 的迹, 记为 $\mathrm{tr}(U)$。$m \times n$ 模糊阵全体记为 $\mathbf{F}_*^{m\times n}(R)$, n 维模糊向量全体记为 $\mathbf{F}_*^{n}(R)$。

任意 $u, v \in \mathbf{F}_*^{m\times n}(R)$, 令

$$D_1(u,v) = \max_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} d(u_{ij}, v_{ij}) \tag{2}$$

$$D_2(u,v) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d^2(u_{ij}, v_{ij})} \tag{3}$$

定理 1 Ⅰ) D_1 和 D_2 均为 $\mathbf{F}_*^{m\times n}(R)$ 上的距离;

Ⅱ) D_1 与 D_2 等价;

Ⅲ) $(\mathbf{F}_*^{m\times n}(R), D_i)$ 是完备的距离空间, $i = 1, 2$。

证明 根据 d 是 $\mathbf{F}_*(R)$ 上的距离和 Schwartz 不等式可证 Ⅰ), 由不等式

$$D_1(u,v) \le D_2(u,v) \le \sqrt{mn} D_1(u,v) \tag{4}$$

得证Ⅱ), 由 $(\mathbf{F}_*(R), d)$ 的完备性易证 $(\mathbf{F}_*^{m\times n}(R), D_1)$ 完备, 又由Ⅱ)得证 $(\mathbf{F}_*^{m\times n}(R), D_2)$ 完备。证毕。

任意 $U \in \mathbf{F}_*^{m\times n}(R)$, 称

$$\| U \|_i = D_i(U, 0)$$

为 U 的范数, $i = 1, 2$。其中 0 为 m 行 n 列模糊零矩阵, 易知对 $\lambda \in R$, $U, V \in \mathbf{F}_*^{m\times n}(R)$,

$$\| U \|_1 = \max_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \| u_{ij} \| \tag{5}$$

$$\| U \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \| u_{ij} \|^2} \tag{6}$$

$$\| \lambda U \|_i = |\lambda| \| U \|_i, \quad i = 1, 2 \tag{7}$$

$$\| U + V \| = \| U \|_i + \| V \|_i, \quad i = 1, 2 \tag{8}$$

定义 1 设 $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ 概率空间, 模糊集值映射 $X: \Omega \to \mathbf{F}_*(R)$ 称为模糊随机变量(简记为 $f.r.v$), 如果对任意 $\alpha \in [0, 1]$, $[X]_\alpha^-$ 和 $[X]_\alpha^+$ 均为实值随机变量。用 $FRV(\Omega)$ 表示模糊随机变量全体。若 $E \| X \|^2 < \infty$, 称 X 为二阶模糊随机变量, 称 $f.r.v$ 序列 $\{X(k), k = 1, 2, \cdots\}$ 均方收敛于 $f.r.v. X$, 若 $\lim_{k\to\infty} E d^2(X(k),$

$X)=0$，记为 $X(k)\xrightarrow{m.\ s\ D}X$。称为 $E(X)\in\mathbf{F}_*(R)$ 为 $f.r.v.X$ 的数学期望或均值，若对任意 $\alpha\in[0,1]$ 有

$$[E(X)]_\alpha=[E([X]_\alpha^-),E([X]_\alpha^+)] \tag{9}$$

若 $X,Y\in FRV(\Omega)$，称

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{(X-E(X))(Y-E(Y))\} \tag{10}$$

为 X 与 Y 的模糊协方差。特别地 $\mathrm{Cov}(X,X)$ 称为 X 的模糊方差，记为 $\mathrm{Var}(X)$。

容易证明，在 $\mathbf{F}_*(R)$ 上，定义 1 与文献[6,7]中模糊随机变量及其数学期望的定义是一致的。

定义 2　设 $X:\Omega\to\mathbf{F}_*^{m\times n}(R)$，即 $X=(x_{ij})_{m\times n}$ 且 $x_{ij}\in FRV(\Omega)$，$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$。则称 X 为 m 行 n 列模糊随机矩阵，用 $FRV^{m\times n}(\Omega)$ 表示 m 行 n 行模糊随机矩阵全体。特别地当 $n=1$ 时，称为 m 维模糊随机向量。用 $FRV^m(\Omega)$ 表示 m 维模糊随机向量全体。称

$$E(X)=(E(x_{ij}))_{m\times n} \tag{11}$$

为 X 的数学期望。称 X 为二阶模糊随机矩阵，若 $E\|X\|_2^2<\infty$；称模糊随机矩阵序列 $\{X(k)\}$ 均方收敛于 X，若 $\lim\limits_{k\to\infty}ED_2^2(X(k),X)=0$，记为 $X(k)\xrightarrow{m,s,D}X$。若 $X,Y\in FRV^n(\Omega)$，称

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{(X-E(X))(Y-E(Y))^T\} \tag{12}$$

为 X 为 Y 的模糊协方差阵。显然 $\mathrm{Cov}(X,Y)=(\mathrm{Cov}(x_i,y_j))_{n\times n}$。

设 $X,Y\in FRV^{m\times n}(\Omega)$，$\lambda$ 为实数，H 为 $s\times m$ 实矩阵，G 为 $n\times l$ 实矩阵，根据 $f.r.v$ 数学期望的线性性质[7]易证下式

$$E(\lambda X)=\lambda E(X) \tag{13}$$

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y) \tag{14}$$

$$E(HXG)=HE(X)G \tag{15}$$

定理 2　Ⅰ) 模糊矩阵序列 $U(k)=(u_{ij}(k))_{m\times n}(k=1,2,\cdots)$ 按距离收敛于 U 的充分必要条件是 $u_{ij}(k)\xrightarrow{d}u_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$。

Ⅱ) 模糊随机矩阵 $X=(x_{ij}(\omega))$ 为二阶的充分必要条件是对任意 i,j，x_{ij} 为二阶 $f.r.v$。

Ⅲ) 设 $X(k)$，$X\in FRV^{m\times n}(\Omega)(k=1,2,\cdots)$，则 $X(k)\xrightarrow{m,s,D}X$ 的充分必要条件是对任意 i,j，$x_{ij}(k)\xrightarrow{m,s,D}x_{ij}$。

证明　Ⅰ) 由式(2)和定理 1，Ⅱ) 易证，由式(6)得，

$$E\|X\|_2^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E\|x_{ij}\|^2$$

从而Ⅱ)成立，由式(3)得

$$ED_2^2(X(k),X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}Ed^2(x_{ij}(k),x_{ij})$$

从而得证Ⅲ)。证毕。

根据定理 2 和文献[4]不难证明以下结论。

定理 3　设 X,Y 均为 n 维二阶模糊随机向量，则 $E(X),E(Y)$，$E(X^TY)$，$E(XY^T)$，$\mathrm{Cov}(X,Y)$ 均存在。

定理 4　设 $\{X(k)\}$，$\{Y(l)\}$ 均为二阶模糊随机向量序列且 $X(k)\xrightarrow{m,s,D}X$，$Y(l)\xrightarrow{m,s,D}Y$，则 X，Y 也为 n 维二阶模糊随机向量，且 8

$$\lim_{k\to\infty}E(X(k))=E(X), \tag{16}$$

$$\lim_{k\to\infty,\ l\to\infty}E(X(k)^TY(l))=E(X^TY), \tag{17}$$

$$\lim_{k\to\infty,\ l\to\infty}E(X(k)Y(l)^T)=E(XY) \tag{18}$$

这里极限均是按距离收敛。

3 模糊随机系统响应分析

令 $T_d = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$。

定义 3 称$\{X(t), t\in T_d\}$为(二阶)模糊随机(向量)过程, 若对任意 $t\in T_d$, $X(t)$为(二阶)模糊随机变量(向量)。并分别称 $E(X(t))$和$\mathrm{Cov}(X(t), X(s))$为$\{X(t)\}$的均值函数和协方差函数, 记为$\overline{X}(t)$和$R_x(t, s)$。

现在我们来考虑文献[2]中讨论的线性定常模糊随机系统

$$y(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} h(\tau) U(t-\tau) \tag{19}$$

这里 $u(t)$和 $y(t)$分别是定义在概率空间$(\Omega, \mathbf{A}, P)$上的 r 维和 m 维模糊随机向量过程, 而 $h(t)$为 m 行 r 列实矩阵函数, 级数是均方意义下的, 当 $u(t)$和 $y(t)$退化为实随机过程时, 即为文献[5]所研究的随机系统。

引理 设$A\in \mathbf{F}_*^{m\times n}(R)$, $B\in \mathbf{F}_*^{n\times m}(R)$, 则

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \tag{20}$$

$$\|\mathrm{tr}(AB)\| \leq \|A\|_2 \|B\|_2 \tag{21}$$

证明 式(20)显然成立。现证式(21)。设$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, 根据式(8)和 Schwartz 不等式及式(6),

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \left\|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}\right\| \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \|a_{ij}\| \, \|b_{ji}\| \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \|a_{ij}\|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \|b_{ij}\|^2} \\ &= \|A\|_2 \|B\|_2. \end{aligned}$$

证毕.

定理 5 假设

1) 系统(19)是渐近稳定的, 即存在 $C>0$, $0<\rho<1$ 使对任意 $\tau>0$ 有

$$\max |h_{ij}(\tau)| \leq C\rho^{\tau} \tag{22}$$

2) 输入 $u(t)$是一个二阶模糊随机向量过程, 并具有均值函数 $\overline{u}(t)$和协方差函数 $R_u(t, s)$, 且对任意 $t>0$,

$$\sup_{s\leq t} E\|u(s)\|_1^2 < \infty \tag{23}$$

则有

Ⅰ) 输出 $y(t)$以均方收敛形式存在。

Ⅱ) $\{y(t)\}$也是一个二阶模糊随机向量过程, 且其均值函数为

$$\overline{y}(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} h(\tau)\overline{u}(t-\tau) \tag{24}$$

协方差函数为

$$R_y(t, s) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} h(k) R_u(t-k, s-l) h^T(l) \tag{25}$$

输入与输出之间的互协方差函数

$$R_{uy}(t, s) = \sum_{l=0}^{\infty} R_u(t, s-l) h^T(l) \tag{26}$$

证明 Ⅰ)先证 $m=1$ 时成立。令

$$a_k = \sum_{\tau=0}^{k} h(\tau) u(t-\tau) \tag{27}$$

那么对 $l>k\geq 0$, 由式(1), 式(8), 式(20)和(21)有

$$E d^2(a_l, a_k) = E\left\|\sum_{\tau=k+1}^{l} h(\tau) u(t-\tau)\right\|^2$$

$$= E\left\| \sum_{\tau=k+1}^{l}\sum_{s=k+1}^{l} h(s)u(t-s)u^T(t-\tau)h^T(\tau)\right\|$$
$$\le E\left\{ \sum_{\tau=k+1}^{l}\sum_{s=k+1}^{l} \left\| \mathrm{tr}(h^T(\tau))h(s)u(t-s)u^T(t-\tau)\right\|\right\}$$
$$\le E\left\{ \sum_{\tau=k+1}^{l}\sum_{s=k+1}^{l} \left\| h^T(\tau)h(s)\right\|_2 \left\| u(t-s)u^T(t-\tau)\right\|_2\right\}$$
$$\le \sum_{\tau=k+1}^{l}\sum_{s=k+1}^{l} \left\| h^T(\tau)h(s)\right\|_2 E\left\| u(t-s)u^T(t-\tau)\right\|_2$$

由式(22)和式(4)得

$$\| h^T(\tau)h(s)\|_2 \le rC^2\rho^{\tau+s}$$

又由式(23)对固定的 t,存在 M 使

$$\sup_{s\le t} E\| u(s)\|_1^2 \le M$$

从而由式(4),式(5)和式(1)及实随机变量 Schwartz 不等式,对任意 $s>0$, $\tau>0$,

$$E\| u(t-s)u^T(t-\tau)\|_2 \le r\sqrt{E\| u(t-s)\|_1^2}\sqrt{E\| u(t-\tau)\|_1^2} \le rM$$

所以

$$Ed^2(a_l, a_k) \le M r^2C^2(\rho^{k+1}-\rho^{l+1})^2/(1-\rho)^2$$

当 $k\to\infty$, $l\to\infty$ 时有 $Ed^2(a_l, a_k)\to 0$,根据模糊随机变量序列均方收敛的 Cauchy 准则[4]得证。

当 $m>1$,只要分别考虑 $y(t)$ 的每个分量,再由定理 2 得证。

Ⅱ) 由定理 3 和定理 4, $y(t)$ 为二阶模糊随机过程,且

$$\overline{y}(t) = E(y(t)) = \lim_{k\to\infty} E(a_k)$$

再由式(15)和式(27)得

$$\overline{y}(t) = \lim_{k\to\infty}\sum_{\tau=0}^{k} h(\tau)E(u(t-\tau))$$

即式(23)得证。而由式(15),式(19)和式(24),

$$R_y(t,s) = \mathrm{Cov}(y(t), y(s)) = E\{(y(t)-\overline{y}(t))(y(s)-\overline{y}(s))^T\}$$
$$= E\left\{\lim_{\substack{k\to\infty\\ j\to\infty}}\sum_{\tau=0}^{k}\sum_{l=0}^{j} h(\tau)(u(t-\tau)-\overline{u}(t-\tau))(u(s-l)-\overline{u}(s-l))^T h^T(l)\right\}$$
$$= \lim_{\substack{k\to\infty\\ j\to\infty}}\sum_{\tau=0}^{k}\sum_{l=0}^{j} h(k)R_u(t-k, s-l)h^T(l)$$

此为式(25)。类似可证式(26)。定理证毕。

推论　如果输入 $\{u(t)\}$ 是一个弱平稳模糊随机(向量)过程,即均值函数 $\overline{u}(t)=\overline{u}$ 为常量,协方差函数 $R_u(t, t+s)=R_u(s)$ 与 t 无关,则输出 $\{y(t)\}$ 也是一个弱平稳过程。其常均值为

$$\overline{y} = \sum_{\tau=0}^{\infty} h(\tau)\overline{u} \tag{28}$$

协方差函数为

$$R_y(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} h(k)R_u(s-l+k)h^T(l) \tag{29}$$

协方差函数

$$R_{uy}(s) = \sum_{l=0}^{\infty} R_u(s-l)h^T(l) \tag{30}$$

4　结论

本文在研究模糊随机向量序列均方收敛性的基础上证明了模糊随机系统的输出在均方意义下的收敛

(下转第 79 页)

各定级因素合理的权重值, 见表 4。

表 4 待定的定级因素权重值表

定级因素	繁华程度	道路通达度	对外交通便利度	生活设施完善度	公用设施完备度	环境质量	文体设施
权重值	35.8	15.1	12.9	15.2	11.3	5.2	4.2

4 说明与结论

本文介绍的层次分析法和特尔菲法赋权精度分析与定权方法是基于专家对各定级因素的重要性判断精度都相同的情况下进行的。在这一前提下, 我们可以看出层次分析法的赋权精度普遍高于特尔菲法, 因此, 笔者认为: 在有条件的地区, 只要参与评价的专家对判断矩阵元素的经济和系统工程的含义有充分的认识, 就尽可能地运用层次分析法来分析各定级因素的权重。

在实际工作中, 为了保证定级因素权重确定的准确性, 可以采用特尔菲法来校核层次分析法的结果, 当对同一因素的重要性分别采用层次分析法和特尔菲法进行测算, 所得的权重值之间相差很大时, 则应对专家进行重新征询; 当采用以上两方法所测的同一因素权重值相差值在合理的范围时, 则运用上述思路, 综合层次分析法和特尔菲法的评价结论, 确定最终定级因素权重, 这样, 有利于提高定权的精度, 保证最终待估定级因素权重值的合理性和实用性。

参 考 文 献

1 周江文. 误差理论. 北京: 测绘出版社, 1984
2 国家土地管理局. 城镇土地定级堆积规程. 北京: 农业出版社, 1990
3 Bjerhammar A. Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses. Elsevier Scientific Publishing Company. Amsterdam, 1973

(上接第 59 页)

性, 并导出了输入输出之间的模糊概率特征关系方程。公式(30)就是离散时间模糊 Wiener-Hopf 方程, 是经典的 Wiener-Hopf 方程的推广, 它对于模糊 *Wiener* 滤波以及相关分析法的系统辩识等都具有重要意义。

参 考 文 献

1 张跃, 王光远, 赵利. 模糊随机系统. 系统工程理论与实践, 1995, 15(7): 19～24
2 张跃, 乔忠, 王光远. 离散模糊随机系统(Ⅰ). 系统工程理论与实践, 1995, 15(9): 1～5
3 张跃, 乔忠, 王光远. 离散模糊随机系统(Ⅱ). 系统工程理论与实践, 1995, 15(10): 7～12
4 胡良剑, 吴让泉. 模糊随机变量序列的均方收敛性. 中国纺织大学学报, 1998, 24(5): 57～60
5 韩崇昭, 王月娟, 万百五. 随机系统理论. 西安: 西安交通大学出版社, 1987
6 Puri M L and Ralescu D A. Fuzzy random variables. J Math. Anal Appl, 1986, 114: 409～422
7 张跃, 王光远. 模糊随机动力系统理论. 北京: 科学出版社, 1993