线性分式—二次双层规划的对偶定理

杨丰梅

(北京化工大学应用数理系, 北京 100029)

摘要 先给出线性分式规划的一个对偶定理, 然后利用这个结果建立和证明线性分式—二次双层规划的对偶定理。

关键词 双层规划 对偶定理 线性分式函数 二次函数

Duality Theorems in Linear Fractional —Quadratic Bilevel Programming

Yang Fengmei

(Dept. of Appl. Math. and Physics, Beijing Univ. of Chemical Technology, Beijing 100029)

Abstract Based on a duality theorem, we establish a duality framework for linear fractional- quadratic bilevel programming.

Keywords bilevel programming; duality theorem; linear fractional function; quadratic function

1 引言

双层规划模型广泛地应用于资源配置、区域规划、生产管理、市场营销与存贮、交通规划、通讯网络设计等领域[1]。关于双层规划的研究, 主要集中在最优性条件、解集的结构和求解算法方面, 请见文献[2～5]的参考文献。在 1994 年, Wang, Wang 和 Romano-Rodriquez 建立了双层规划的第一个对偶性理论, 证明了一个弱对偶定理和一个强对偶性定理[6]。本文先证明线性分式规划的一个对偶定理, 利用 Kuhn-Tucker 条件将内层问题进行转换, 从而来建立线性分式—二次双层规划的一个弱对偶定理和一个强对偶定理。当线性分式函数退化为线性函数时, 本文的对偶定理就是文献[6]中的定理 2, 定理 3 和定理 4。

本文讨论以下线性分式—二次双层规划问题:

$$(LFQP)\quad \begin{cases} \max\limits_{x} F(x,y) = \dfrac{a^T x + b^T y + l_1}{c^T x + d^T y + l_2} \quad \text{其中 } y \text{ 解} \\ \max\limits_{y|x} f(x,y) = \dfrac{1}{2}(x^T, y^T) Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c_1^T x + d_1^T y \\ \text{s.t. } Ax + By \le r \end{cases}$$

其中 $a, c, c_1 \in R^{n_1}$, $b, d, d_1 \in R^{n_2}$, $r \in R^m$, A, B 和 Q 分别为 $n_1 \times m$, $n_2 \times m$ 和 $(n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2)$ 实矩阵; $\max\limits_{y|x}$ 表示当 x 取定后求关于 y 的极大。令

$$S = \{(x,y) \mid Ax + By \le r\},$$
$$X = \{x \mid \text{存在 } y \in R^{n_2} \text{ 使得 } (x,y) \in S\},$$

° 本文于 1997 年 11 月 11 日收到
北京化工大学青年教师研究基金资助项目

$$Y_x = \{y \mid By \le r - Ax\},$$
$$Y(x) = \{y \mid \arg\{\max_{y|x} f(x,y) \mid y \in Y_x\}\},$$
$$F = \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y(x)\}$$

定义 1 F 称为 $(LFQP)$ 的可行解集。$(\bar{x}, \bar{y})$ 称为 $(LFQP)$ 的一个最优解, 如果

1) $(\bar{x}, \bar{y}) \in F$;

2) $F(\bar{x}, \bar{y}) \ge F(x,y)$, $\forall (x,y) \in F$.

为讨论方便, 我们假定

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2^T \\ Q_2 & Q_3 \end{pmatrix}$$

其中 Q_3 为一负定矩阵, 注意到 $(LFQP)$ 的内层问题:

$$(IP) \qquad \begin{cases} \max\limits_{y} f(x,y) \\ \text{s t } By \le r - Ax \end{cases}$$

是将 x 作为参数, 求目标函数关于 y 的极大化问题。由于

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^T, y^T)Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c_1^T x + d_1^T y$$
$$= \frac{1}{2}x^T Q_1 x_1 + \frac{1}{2}y^T Q_3 y + x^T Q_2^T y + c_1^T x + d_1^T y$$
$$= \frac{1}{2}y^T Q_3 y + (x^T Q_2^T + d_1^T)y + \left(\frac{1}{2}x^T Q_1 x + c_1^T x\right)$$

和 Q_3 为一负定矩阵, 对于给定的每个 $x \in X$, (IP) 有唯一最优解, 记为 $y(x)$, 即

$$Y(x) = \{y(x)\}$$

2 引理

将内层问题 (IP) 用 Kuhn-Tucker 充要条件表示, 可证以下引理。

引理 1 $(\bar{x}, \bar{y})$ 是 $(LFQP)$ 的一个最优解, 当且仅当存在 $\bar{w} \in R^m$ 使得 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w})$ 是下列非线性规划问题的一个最优解

$$(P_1) \qquad \begin{cases} \max\limits_{x,y,w} F(x,y) = \dfrac{a^T x + b^T y + l_1}{c^T x + d^T y + l_2} & (2\ 1a) \\ \text{s t } Ax + By \le r & (2\ 1b) \\ \quad w^T(Ax + By - r) = 0 & (2\ 1c) \\ \quad Q_2 x + Q_3 y + d_1 = B^T w & (2\ 1d) \\ \quad w \ge 0 & (2\ 1e) \end{cases}$$

引理 1 的证明同文献[6]中定理 1 的证明。事实上, 由于内层问题 (IP) 是一个标准的凸规划问题, (IP) 等价于 Kuhn-Tuchker 充要条件 (2 1b)～(2 1e).

对于每个给定的 $w \ge 0$, 定义

$S[w] = \{(x,y) \mid (x,y)$ 满足条件 (2 1b)～(2 1d)$\}$。在后续的讨论中我们约定

$\max\{F(x,y) \mid (x,y) \in S[w]\} = -\infty$, 如果 $S[w] = \varnothing$.

不难证明如下结果。

引理 2 (P_1) 等价于以下 max max 问题:

$$(MMP) \qquad \max_{w \ge 0} \max_{(x,y) \in S[w]} F(x,y)$$

(MMP) 的内层问题为以下带参数的线性分式规划问题:

$$(P_w)\quad\begin{cases}\max\limits_{x,y} F(x,y)=\dfrac{a^Tx+b^Ty+l_1}{c^Tx+d^Ty+l_2} & (2.2a)\\ \text{s.t. } Ax+By\le r & (2.2b)\\ \quad w^T(Ax+By-r)=0 & (2.2c)\\ \quad Q_2x+Q_3y+d_1=B^Tw & (2.2d)\end{cases}$$

注意到当 $w\ge 0$, 约束方程(2.2b)等价于

$$w^T(Ax+By-r)\geqq 0 \qquad (2.2c')$$

于是, 对于给定的 $w\ge 0$, (P_w) 可等价地表达为

$$(P_w')\quad\begin{cases}\max\limits_{x,y} F(x,y)=\dfrac{a^Tx+b^Ty+l_1}{c^Tx+d^Ty+l_2}\\ \text{s.t. } Ax+By-r\le 0\\ \quad W^T(r-Ax-By)\le 0\\ \quad Q_2x+Q_3y+d_1-B^Tw=0\end{cases}$$

定义以下线性规划问题:

$$(D_w')\quad\begin{cases}\min\limits_{u_1,u_2,u_3} h_w(u_1,u_2,u_3)=\dfrac{r^T(u_1-u_2w)+(B^Tw-d_1)^Tu_3+l_1}{l_2} & (2.3a)\\ \text{s.t. } (u_1-u_2w)^TA+u_3^TQ_2+\dfrac{(u_1-u_2w)^Tr+u_3^T(B^Tw-d_1)+l_1}{l_2}c^T=a^T & (2.3b)\\ \quad (u_1-u_2w)^TB+u_3^TQ_3+\dfrac{(u_1-u_2w)^Tr+u_3^T(B^Tw-d_1)+l_1}{l_2}d^T=b^T & (2.3c)\\ \quad u_1\ge 0 & (2.3d)\\ \quad u_2\ge 0 & (2.3e)\end{cases}$$

其中 $u_1\in R^m$, $u_2\in R^1$, $u_3\in R^2$.

我们可以证明 (D_w') 是 (P_w') 的对偶问题, 满足以下性质:

引理 3　对于给定的 $w\ge 0$, 设 $S[w]\ne\varnothing$。如果 (P_w') 有最优解 $(\overline{x_w},\overline{y_w})$, 则 (D_w') 一定也有最优解 $(\overline{u_1}(w),\overline{u_2}(w),\overline{u_3}(w))$, 且 (P_w') 和 (D_w') 的最优目标函数值相等。即

$$F(\overline{x_w},\overline{y_w})=h_w(\overline{u_1}(w),\overline{u_2}(w),\overline{u_3}(w))$$

上述引理的证明同文献[7]中主要定理的证明方法。为篇幅所限, 我们略去证明过程。

3　主要结果

本节将证明两个对偶定理。

定义 max-min 问题如下

$$(MMP)\quad \max_{w\ge 0}\min_{u_1,u_2,u_3} h_w(u_1,u_2,u_3) \qquad (3.1a)$$

$$\text{s.t. } (u_1-u_2w)^TA+u_3^TQ_2+\frac{(u_1-u_2w)^Tr+u_3^T(B^Tw-d_1)+l_1}{l_2}C^T=a^T \qquad (3.1b)$$

$$(u_1-u_2w)^TB+u_3^TQ_3+\frac{(u_1-u_2w)^Tr+u_3^T(B^Tw-d_1)+l_1}{l_2}d^T=b^T \qquad (3.1c)$$

$$u_1\ge 0 \qquad (3.1d)$$

$$u_2\ge 0 \qquad (3.1e)$$

对给定的 $w\ge 0$, 令

$$S[w]=\{(u_1,u_2,u_3)\mid (u_1,u_2,u_3)\text{ 满足(3.1b)～(3.1e)}\}。$$

当 $S[w]=\varnothing$ 时, 我们约定

$$\min\{h_w(u_1,u_2,u_3)\mid (u_1,u_2,u_3)\in S[w]\}=-\infty。$$

这样 (MMP) 可表述为

(P_2)
$$\max_{w\geq 0}\ \min_{(u_1,u_2,u_3)\in S[w]} h_w(u_1,u_2,u_3)$$

依引理 2, P_1 等价于(MMP)。又依引理 3, (MMP)的内层问题(P_w')可由(D_w')来代替, 因此(P_1)可重写为(P_2)。

定理 1(弱对偶性) 如果(x,y,w)是(P_1)的一个可行解, 而(u_1, u_2, u_3, w)是(P_2)的一个可行解, 则
$$h_w(u_1, u_2, u_3)\geq F(x,y)$$

证明 (3.1b)右乘 x 和(3.1c)右乘 y, 然后相加即得
$$(u_1-u_2w)^T(Ax+By)+u_3^T(Q_2x+Q_3y)$$
$$+\frac{(u_1-u_2w)^Tr+u_3^T(B^Tw-d_1)+l_1}{l_2}(c^Tx+d^Ty)$$
$$=a^Tx+b^Ty$$

上式可重新写为
$$(u_1-u_2w)^T(Ax+By-r)+u_3^T(Q_2x+Q_3y+d_1-B^Tw)+(u_1-u_2w)^Tr+u_3^T(B^Tw-d_1)$$
$$+\frac{(u_1-u_2w)^Tr+u_3^T(B^Tw-d_1)+l_1}{l_2}(c^Tx+d^Ty)$$
$$=a^Tx+b^Ty$$

即
$$(u_1-u_2w)^T(Ax+By-r)+u_3^T(Q_2x+Q_3y+d_1-B^Tw)$$
$$+\frac{(u_1-u_2w)^Tr+u_3^T(B^Tw-d_1)+l_1}{l_2}(c^Tx+d^Ty+l_2)$$
$$\neq a^Tx+b^Ty+l_1 \tag{3.1'}$$

依(x,y,w)关于(P_1)的可行性和(u_1, u_2, u_3, w)关于(P_2)的可行性,
$$u_1^T(Ax+By-r)\leq 0$$
$$w^T(Ax+By-r)=0$$
$$u_3^T(Q_2x+Q_3y+d_1-B^Tw)=0$$

于是
$$\frac{(u_1-u_2w)^Tr+u_3^T(B^Tw-d_1)+l_1}{l_2}(c^Tx+d^Ty+l_2)\geq a^Tx+b^Ty+l_1$$

又因为前面已假定对于$\forall(x,y)\in S$, $a^Tx+b^Ty+l_1>0$, 故
$$\frac{(u_1-u_2w)^Tr+u_3^T(B^Tw-d_1)+l_1}{l_2}\geq\frac{a^Tx+b^Ty+l_1}{c^Tx+d^Ty+l_2}$$

即
$$hw(u_1, u_2, u_3)\geq F(x,y)$$

定理 1 得证。

现在证明一个强对偶定理

定理 2(强对偶性) 令$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{w})$和$(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}, \overline{w})$分别为$(P_1)$和$(P_2)$的一个可行解, $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{w})$和$(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}, \overline{w})$分别为$(P_1)$和$(P_2)$的一个最优解的充要条件是
$$\frac{(\overline{u_1}-\overline{u_2}w)^Tr+\overline{u_3}^T(B^Tw-d_1)+l_1}{l_2}\geq\frac{a^T\overline{x}+b^T\overline{y}+l_1}{c^T\overline{x}+d^T\overline{y}+l_2} \tag{3.2a}$$
$$(\overline{u_1}-\overline{u_2}x)^T(Ax+By-r)+\overline{u_3}^T(Q_2x+Q_3y+d_1-B^T\overline{w})\leq 0,\ \forall(x,y)\in F \tag{3.2b}$$

证明 先设$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{w})$和$(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}, \overline{w})$分别为$(P_1)$和$(P_2)$的一个最优解。如果$S[w]\neq\varnothing$, 依引理 3,
$$\min_{(u_1,u_2,u_3)\in S[w]} h_w(u_1,u_2,u_3)=\max_{(x,y)\in S[w]} F(x,y)$$

如果$S[w]=\varnothing$, 依约定
$$\min_{(u_1,u_2,u_3)\in S[w]} h_w(u_1,u_2,u_3)=\max_{(x,y)\in S[w]} F(x,y)=-\infty$$

于是, 无论在哪一种情形都有

$$\max_{w\geq 0}\min_{(u_1,u_2,u_3)\in S[w]} h_w(u_1,u_2,u_3)=\max_{w\geq 0}\max_{(x,y)\in S[w]}F(x,y)$$

由于$(\bar{x},\bar{y},\bar{w})$和$(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3,\bar{w})$分别为$(P_1)$和$(P_2)$的一个最优解，故

$$h_w(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3)=F(\bar{x},\bar{y}),$$

即式(3.2a)成立。

由于$(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3,\bar{w})$是$(P_2)$的可行解，依(3.1b)和(3.1c)得

$$(\bar{u}_1-\bar{u}_2\bar{w})^T(A\bar{x}+B\bar{y})+\bar{u}_3^T(Q_2\bar{x}+Q_3\bar{y})+\frac{(\bar{u}_1-\bar{u}_2\bar{w})^Tr+\bar{u}_3^T(B^T\bar{w}-d_1)+l_1}{l_2}(c^T\bar{x}+d^T\bar{y})$$

$$=a^T\bar{x}+b^T\bar{y}$$

于是有

$$(\bar{u}_1-\bar{u}_2\bar{w})^T(A\bar{x}+B\bar{y}-r)+\bar{u}_3^T(Q_2\bar{x}+Q_3\bar{y}-B^Tw+d_1)$$
$$+\frac{(\bar{u}_1-\bar{u}_2\bar{w})^Tr+\bar{u}_3^T(B^T\bar{w}-d_1)+l_1}{l_2}(c^T\bar{x}+d^T\bar{y}+l_2)$$
$$=a^T\bar{x}+b^T\bar{y}+l_1.$$

由于$(\bar{x},\bar{y},\bar{w})$为$(P_1)$的一个最优解，依引理 1，$(\bar{x},\bar{y})$为$(LFQP)$的最优解。所以对于任意给定的$(x,y)\in F$，

$$\frac{a^Tx+b^Ty+l_1}{c^Tx+d^Ty+l_2}\leq\frac{a^T\bar{x}+b^T\bar{y}+l_1}{c^T\bar{x}+d^T\bar{y}+l_2}$$

但由(3.2a)

$$\frac{a^T\bar{x}+b^T\bar{y}+l_1}{c^T\bar{x}+d^T\bar{y}+l_2}=\frac{(\bar{u}_1-\bar{u}_2\bar{w})^Tr+\bar{u}_3^T(B^T\bar{w}-d_1)+l_1}{l_2}$$

因此证得

$$\frac{a^Tx+b^Ty+l_1}{c^Tx+d^Ty+l_2}\leq\frac{(\bar{u}_1-\bar{u}_2\bar{w})^Tr+\bar{u}_3^T(B^T\bar{w}-d_1)+l_1}{l_2}$$

$$a^Tx+b^Ty+l_1\leq\frac{(\bar{u}_1-\bar{u}_2\bar{w})^Tr+\bar{u}_3^T(B^T\bar{w}-d_1)+l_1}{l_2}(c^Tx+d^Ty+l_2)$$

依(3.1)，得

$$(\bar{u}_1-\bar{u}_2\bar{w})^T(Ax+By-r)+\bar{u}_3^T(Q_2x+Q_3y+d_1-B^T\bar{w})\leq 0$$

即(3.2b)得证。

反过来，设(3.2a)和(3.2b)成立。我们要证$(\bar{x},\bar{y},\bar{w})$和$(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3,\bar{w})$分别为$(P_1)$和$(P_2)$的最优解。令$(x,y)\in F$，由于

$$\frac{a^T\bar{x}+b^T\bar{y}+l_1}{c^T\bar{x}+d^T\bar{y}+l_2}=\frac{(\bar{u}_1-\bar{u}_2\bar{w})^Tr+\bar{u}_3^T(B^T\bar{w}-d_1)+l_1}{l_2}\qquad(3.3)$$

依式(3.1)，上式右端应等于

$$\frac{a^Tx+b^Ty+l_1}{c^Tx+d^Ty+l_2}-\left[\frac{(\bar{u}_1-\bar{u}_2\bar{w})^T(Ax+By-r)+\bar{u}_3^T(Q_2x+Q_3y+d_1-B^Tw)}{c^Tx+d^Ty+l_2}\right]$$

再依(3.2b)，上式应大于等于$\dfrac{a^Tx+b^Ty+l_1}{c^Tx+d^Ty+l_2}$

因此，$(\bar{x},\bar{y})$为$(LFQP)$的一个最优解，故依引理 1，$(\bar{x},\bar{y},\bar{w})$为$(P_1)$的一个最优解。

依(3.3)和定理 1，知$(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3,\bar{w})$为$(P_2)$的一个最优解。定理证毕。

参考文献

1 Wang S. Multilevel Programming: Models and Applications. Management Science and Economic Development of China (Ed. S. Ng et al). Hong Kong: 1996: 194～205

(下转第 34 页)