数学分析（I） 第二讲 数列极限

第二章 数列极限

主讲人：谢惠民

Email: szhmxie@pub.sz.jsinfo.ne

数学科学学院

Suzhou University

目录

一. 引言

数列就是用正整数编号的一列数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots,$$

经常写为 $\{x_n\}$, 其中 x_n 称为通项.

若将数列的不同项看成为不同的元素, 则可以将 $\{x_n\}$ 看成可列集, 记为:

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\},$$

但如果将数列 $\{x_n\}$ 作为数集看待时, 则它可能只是有限集, 即只与数轴上的有限个点对应, 甚至可能只是单元集, 这就是常值数列: $c, c, \cdots, c, \cdots$, 或记为 $\{c\}$.

中国春秋战国时期的名家代表人物庄周 (约公元前 369–前 286 年) 的著作《庄子》的“天下”篇中有这样的几句话:

“一尺之捶, 日取其半, 万世不竭.”

- 一种理解方式是将每天所取的长度排起来形成一个数列:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots,$$

  其中的项当 n 无限增大时越来越接近于 0, 但永远不会变成 0 (即“万世不竭”). 这里与我们即将介绍的数列极限有密切联系.

- 一种理解方式是一尺长的捶可以分成无限多个部分, 即有

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots,$$

  这涉及到对无限项求和如何理解的问题, 与第二章中的无穷级数概念有直接关系.

中国春秋战国时期的名家代表人物庄周 (约公元前 369–前 286 年) 的著作《庄子》的“天下”篇中有这样的几句话:

“一尺之捶, 日取其半, 万世不竭.”

- 一种理解方式是将每天所取的长度排起来形成一个数列:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots,$$

其中的项当 n 无限增大时越来越接近于 0, 但永远不会变成 0 (即“万世不竭”). 这里与我们即将介绍的数列极限有密切联系.

- 一种理解方式是一尺长的捶可以分成无限多个部分, 即有

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots,$$

这涉及到对无限项求和如何理解的问题, 与第二章中的无穷级数概念有直接关系.

二. 数列极限的定义

定义1

可给定数列 $\{x_n\}$ 和实数 a, 若对每一个 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对每一个正整数 $n \geqslant N$, 成立 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 称 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

也可简记为 $x_n \to a\ (n \to \infty)$.

二. 数列极限的定义

定义1

设给定数列 $\{x_n\}$ 和实数 a, 若对每一个 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对每一个正整数 $n \geqslant N$, 成立 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 称 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

也可简记为 $x_n \to a \ (n \to \infty)$.

利用逻辑记号 $\forall$ 和 $\exists$, 可以将上述定义改写如下

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Longleftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0, \exists\,N, \forall\,n \geqslant N, \text{ 成立 } |x_n - a| < \varepsilon.$$

二. 数列极限的定义

定义1

可给定数列 $\{x_n\}$ 和实数 a, 若对每一个 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对每一个正整数 $n \geqslant N$, 成立 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 称 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

也可简记为 $x_n \to a \ (n \to \infty)$.

利用逻辑记号 $\forall$ 和 $\exists$, 可以将上述定义改写如下

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \geqslant N, \text{ 成立 } |x_n - a| < \varepsilon.$$

注1

在多数文献中数列极限的定义与我们所用的教科书中的上述定义有些不同, 一般将 $n \geqslant N$ 改为 $n > N$. 可以证明, 这两个定义是完全等价.

二. 数列极限的定义

定义1

设给定数列 $\{x_n\}$ 和实数 a, 若对每一个 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对每一个正整数 $n \geqslant N$, 成立 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 称 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

也可简记为 $x_n \to a\ (n \to \infty)$.

利用逻辑记号 $\forall$ 和 $\exists$, 可以将上述定义改写如下

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Longleftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0, \exists\,N, \forall\,n \geqslant N,\ \text{成立}\ |x_n - a| < \varepsilon.$$

注1

在多数文献中数列极限的定义与我们所用的教科书中的上述定义有些不同, 一般将 $n \geqslant N$ 改为 $n > N$. 可以证明, 这两个定义是完全等价.

定义2

对于给定的实数 x 取不超过它的最大整数, 记为 $[x]$.

定义2

对于给定的实数 x 取不超过它的最大整数, 记为 $[x]$.

例如有

$$[3.5] = 3, \quad [-3.5] = -4.$$

又称函数 $y = [x]$ 为取最大整数函数.
从 $[x]$ 的定义可见成立不等式

$$[x] \leqslant x < [x] + 1, \tag{$*$}$$

或者等价地有

$$x - 1 < [x] \leqslant x.$$

今后凡是用到记号 $[x]$ 时, 这些基本关系式是不可少的.

例1

根据数列极限的定义证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

分析

根据数列极限的定义, 对于给定的 $\varepsilon>0$, 应当按照

$$\frac{1}{n}=\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon \qquad (**)$$

寻找 N, 使得当 $n\geqslant N$ 时, 不等式 $(**)$ 成立. 由于不等式 $(**)$ 等价于 $\frac{1}{\varepsilon}<n$, 因此只要取

$$N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1,$$

则当 $n\geqslant N$ 时就有

$$n\geqslant N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1>\frac{1}{\varepsilon}$$

证: 对 $\varepsilon > 0$, 取

$$N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1,$$

则当 $n \geqslant N$ 时, 就有

$$n \geqslant N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

因此

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

根据数列极限的定义得到 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. □

证: 对 $\varepsilon > 0$, 取

$$N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1,$$

则当 $n \geqslant N$ 时, 就有

$$n \geqslant N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

因此

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

根据数列极限的定义得到 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. □

例2

对于常数 c, 证明常值数列 (或称常数数列) $\{c\}$ 的极限为 c.

证: 对 $\varepsilon > 0$, 取

$$N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1,$$

则当 $n \geqslant N$ 时, 就有

$$n \geqslant N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

因此

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

根据数列极限的定义得到 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. □

例2

对于常数 c, 证明常值数列 (或称常数数列) $\{c\}$ 的极限为 c.

请同学自学,见教科书 p.18. 本题中对于每一个 $\varepsilon > 0$, 可统一取 $N = 1$. 这种情况不多见. 因为从数列极限的定义知道, N 一般要根据给定的 $\varepsilon > 0$ 来取. 在取定 N 之后, 如果换一个更大的 ε, 则 N 可以不必改动. 但如果换一个更小的 ε, 则很可能就需取更大的 N 才能符合极限定义的要求.

例3

设常数 r 满足条件 $|r| < 1$, 证明数列 $\{r^n\}$ 的极限为 0, 即有

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0.$$

这个例题的证明也请同学自学, 见教科书 p.18.

定理1

设非空数集 A 有上界, $\beta=\sup A$, 则一定存在取自 A 中的数列 $\{x_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\beta$.

证:

- (1) 若上确界 $\beta\in A$, 即 $\beta=\max A$, 则只要对每一个 n 取 $x_n=\beta$, 这样得到的常值数列就收敛于 β (参见例 2).
- (2)设$\beta\notin A$, 则对于正整数n有 $\beta-\frac{1}{n}<\beta$. 由于上确界 β 是 A 的最小上界, 比 β 小的数 $\beta-\frac{1}{n}$ 就不会是 A 的上界, 那么对每个自然数n,存在 x_n 有$\beta-\frac{1}{n}<x_n<\beta$, 因此就成立不等式$|x_n-\beta|<\frac{1}{n}$. 由此可见 (参见例 1), 对每一个 $\varepsilon>0$, 只要取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$, 就能保证当 $n\geqslant N$ 时, 满足
$$|x_n-\beta|<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$
从而有
$$\lim_{n\to\infty} x_n=\beta. \quad \square$$

定理1

设非空数集 A 有上界, $\beta = \sup A$, 则一定存在取自 A 中的数列 $\{x_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$.

证:

- (1) 若上确界 $\beta \in A$, 即 $\beta = \max A$, 则只要对每一个 n 取 $x_n = \beta$, 这样得到的常值数列就收敛于 β (参见例 2).
- (2) 设$\beta \notin A$, 则对于正整数n有 $\beta - \frac{1}{n} < \beta$. 由于上确界 β 是 A 的最小上界, 比 β 小的数 $\beta - \frac{1}{n}$ 就不会是 A 的上界, 那么对每个自然数n,存在 x_n 有$\beta - \frac{1}{n} < x_n < \beta$, 因此就成立不等式$|x_n - \beta| < \frac{1}{n}$. 由此可见 (参见例 1), 对每一个 $\varepsilon > 0$, 只要取$N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 就能保证当 $n \geqslant N$ 时, 满足

$$|x_n - \beta| < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \beta. \quad \square$$

注2

还可以证明, 对于上述证明中的第二种情况, 即当 $\sup A = \beta \notin A$ 时, 可以在数集 A 中取到严格单调增加的数列 $\{x_n\}$, 使成立 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$.