数学分析（I） 第一讲　集　合

第一章　集　合

主讲人：谢惠民

Email: szhmxie@pub.sz.jsinfo.ne

数学科学学院

Suzhou University

目录

一. 集合与元素

德国数学家 Cantor (1848–1918) 在 19–20 世纪之交创立了集合论, 现已成为各门数学的共同基础.

一. 集合与元素

德国数学家 Cantor (1848–1918) 在 19–20 世纪之交创立了集合论, 现已成为各门数学的共同基础.

集合及其中的元 (或元素) 是最原始的概念, 只用普通语言描述.

一. 集合与元素

德国数学家 Cantor (1848–1918) 在 19–20 世纪之交创立了集合论, 现已成为各门数学的共同基础.

集合及其中的元 (或元素) 是最原始的概念, 只用普通语言描述.

表示集合有两种方法.

- 列举法, 即将所有元素写出或示意性的写出;
- 条件法, 即将集合写为 $\{x \mid P(x)\}$, 其中 $P(x)$ 是指 x 属于该集合所应当具有的性质.

例如 $A = \{0, 1\}$, 又如, $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$-正整数 (自然数) 全体所成集合(我们今后将正整数与自然数作为同义语).

例如$\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots, n\} = \{n \mid n \text{ 是正整数}\}$.

下面列举部分常用的集合记号：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R} &= \{x \mid x \text{ 是实数}\}, \\
\mathbb{Q} &= \{x \mid x \text{ 是有理数}\} = \{x = \frac{q}{p} \mid p, q \text{ 为整数}, p > 0\}, \\
\mathbb{Z} &= \{x \mid x \text{ 是整数}\}, \\
\mathbb{C} &= \{x \mid x \text{ 是复数}\} = \{x = a + \mathrm{i}b \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \\
\mathbb{R}^2 &= \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}, \\
\mathbb{R}^n &= \{(x_1, \cdots, x_n\} \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}, \\
\mathbb{R}_+ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\},
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbb{R}^2$ 为二维空间, 就是坐标平面上点的全体, $\mathbb{R}^n$ 为 n 维空间, $\mathbb{R}_+$ 为正实数全体.

二. 有限集与无限集

有限集就是只包含有限个元素的集合, 无限集就是非有限集.

二. 有限集与无限集

有限集就是只包含有限个元素的集合, 无限集就是非有限集.

但什么是无限集的本质呢?

据说这一点最早是由文艺复兴时期的意大利大科学家 Galilei (1564–1642) 所发现, 我们将它叙述如下

二. 有限集与无限集

有限集就是只包含有限个元素的集合, 无限集就是非有限集.

但什么是无限集的本质呢?

据说这一点最早是由文艺复兴时期的意大利大科学家 Galilei (1564–1642) 所发现, 我们将它叙述如下

定理1 (Galilei 定理)

集合 S 是无限集的充分必要条件是 S 与自己的一个真子集一一对应.

二. 有限集与无限集

有限集就是只包含有限个元素的集合, 无限集就是非有限集.

但什么是无限集的本质呢?

据说这一点最早是由文艺复兴时期的意大利大科学家 Galilei (1564–1642) 所发现, 我们将它叙述如下

定理1 (Galilei 定理)

集合 S 是无限集的充分必要条件是 S 与自己的一个真子集一一对应.

德国的大数学家 Hilbert (1862–1943) 曾经举一个生动的例子来说明这个定理, 这就是著名的 Hilbert 旅馆.

设想有一个旅馆, 其中有无限多个房间, 它们的编号用完了所有的正整数, 每个房间只能住一位旅客.

有一天晚上, 旅馆已经客满, 但这时来了一位旅客要求住宿. 这对于普通的旅馆是一个没法解决的问题, 可是这家旅馆的老板却有办法. 他请 1 号房间的客人搬到 2 号房间, 2 号房间的客人搬到 3 号房间, 如此等等, 那么原来的客人都有房间住, 而 1 号房间却空出来了, 就可以接待新来的旅客了.

不仅如此, 后来又来了一位旅客要求住宿, 并且说, 他只是打前站的一个代表, 后面还有数不清的旅客正在前来投宿. 这个问题如何能解决呢?

有一天晚上, 旅馆已经客满, 但这时来了一位旅客要求住宿. 这对于普通的旅馆是一个没法解决的问题, 可是这家旅馆的老板却有办法. 他请 1 号房间的客人搬到 2 号房间, 2 号房间的客人搬到 3 号房间, 如此等等, 那么原来的客人都有房间住, 而 1 号房间却空出来了, 就可以接待新来的旅客了.

不仅如此, 后来又来了一位旅客要求住宿, 并且说, 他只是打前站的一个代表, 后面还有数不清的旅客正在前来投宿. 这个问题如何能解决呢? 旅馆的老板又拿出了新招. 他请 1 号的客人与上次一样搬到 2 号, 2 号的客人则搬到 4 号, 3 号的客人搬到 6 号, 如此等等, 这样就可以将所有奇数号的房间全部空出来, 再来多少个旅客也没有困难了.

我们看到,

有一天晚上, 旅馆已经客满, 但这时来了一位旅客要求住宿. 这对于普通的旅馆是一个没法解决的问题, 可是这家旅馆的老板却有办法. 他请 1 号房间的客人搬到 2 号房间, 2 号房间的客人搬到 3 号房间, 如此等等, 那么原来的客人都有房间住, 而 1 号房间却空出来了, 就可以接待新来的旅客了.

不仅如此, 后来又来了一位旅客要求住宿, 并且说, 他只是打前站的一个代表, 后面还有数不清的旅客正在前来投宿. 这个问题如何能解决呢? 旅馆的老板又拿出了新招. 他请 1 号的客人与上次一样搬到 2 号, 2 号的客人则搬到 4 号, 3 号的客人搬到 6 号, 如此等等, 这样就可以将所有奇数号的房间全部空出来, 再来多少个旅客也没有困难了.

我们看到,

- 第一次的方法就是令 n 与 $n+1$ 对应, 从而使得正整数集合 $\mathbb{N}$ 与自己的一个真子集建立一一对应.

有一天晚上, 旅馆已经客满, 但这时来了一位旅客要求住宿. 这对于普通的旅馆是一个没法解决的问题, 可是这家旅馆的老板却有办法. 他请 1 号房间的客人搬到 2 号房间, 2 号房间的客人搬到 3 号房间, 如此等等, 那么原来的客人都有房间住, 而 1 号房间却空出来了, 就可以接待新来的旅客了.

不仅如此, 后来又来了一位旅客要求住宿, 并且说, 他只是打前站的一个代表, 后面还有数不清的旅客正在前来投宿. 这个问题如何能解决呢? 旅馆的老板又拿出了新招. 他请 1 号的客人与上次一样搬到 2 号, 2 号的客人则搬到 4 号, 3 号的客人搬到 6 号, 如此等等, 这样就可以将所有奇数号的房间全部空出来, 再来多少个旅客也没有困难了.

我们看到,

- 第一次的方法就是令 n 与 $n+1$ 对应, 从而使得正整数集合 $\mathbb{N}$ 与自己的一个真子集建立一一对应.
- 第二次的方法就是令 n 与 $2n$ 对应, 使得 $\mathbb{N}$ 与自己的另一个真子集(即偶数全体)建立一一对应.

在有了无限集的概念之后, 我们介绍无限集中最简单的一类集合, 即可列集, 它是今后很有用的一个概念.

定义1

可列集就是能与正整数全体一一对应的无限集.

在有了无限集的概念之后, 我们介绍无限集中最简单的一类集合, 即可列集, 它是今后很有用的一个概念.

定义1

可列集就是能与正整数全体一一对应的无限集.

由此可知, 一个可列集 A 一定可以将它的所有元素排序并表示如下:

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}, \qquad (*)$$

其中将与 1 对应的元素记为 a_1, 将与 2 对应的元素记为 a_2, 一般地将与 n 对应的元素记为 a_n, 如此等等.

在有了无限集的概念之后, 我们介绍无限集中最简单的一类集合, 即可列集, 它是今后很有用的一个概念.

定义1

可列集就是能与正整数全体一一对应的无限集.

由此可知, 一个可列集 A 一定可以将它的所有元素排序并表示如下:

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}, \tag{$*$}$$

其中将与 1 对应的元素记为 a_1, 将与 2 对应的元素记为 a_2, 一般地将与 n 对应的元素记为 a_n, 如此等等.

因此, 可列集就是可以将其中元素用所有正整数进行编号的集合. 将 A 写为 $(*)$ 的意义就是给出 A 与 $\mathbb{N}$ 之间的一一对应, 或者说表明这样的一一对应是存在的.

在上述 Hilbert 旅馆中的所有房间的集合就是一个可列集, 它通过编号与 $\mathbb{N}$ 一一对应. 而老板解决困难的两个方法就是将 $\mathbb{N}$ 与自己的两个真子集

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 2\} \text{ 和 } \{2, 4, \cdots, 2n, \cdots\}$$

建立一一对应, 当然它们也都是可列集. 下面给出可列集的基本性质:

在上述 Hilbert 旅馆中的所有房间的集合就是一个可列集, 它通过编号与 $\mathbb{N}$ 一一对应. 而老板解决困难的两个方法就是将 $\mathbb{N}$ 与自己的两个真子集

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 2\} \text{ 和 } \{2, 4, \cdots, 2n, \cdots\}$$

建立一一对应, 当然它们也都是可列集. 下面给出可列集的基本性质:

1. 任何无限集都有可列子集.
2. 可列集的无限子集为可列集.
3. 一个有限集和一个可列集的并是可列集.
4. 有限个可列集的并是可列集.
5. 可列个有限集的并是可列集.
6. 可列个可列集的并是可列集.

其中除最后的性质 6 之外都可以从可列集的定义直接推出.

下面是一个重要的可列集, 其中的证明方法称为对角线方法, 它还可以用于证明可列集的性质 6.

下面是一个重要的可列集, 其中的证明方法称为对角线方法, 它还可以用于证明可列集的性质 6.

命题1

有理数集 $\mathbb{Q}$ 为可列集.

下面是一个重要的可列集, 其中的证明方法称为对角线方法, 它还可以用于证明可列集的性质 6.

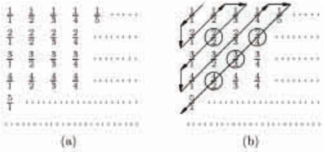
命题1

有理数集 $\mathbb{Q}$ 为可列集.

证: 先将正有理数集

$$\mathbb{Q}_+ = \{x = \frac{q}{p} \mid p, q \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$$

中的元如图(a) 中那样按分子 q 依次排成行,



下面是一个重要的可列集, 其中的证明方法称为对角线方法, 它还可以用于证明可列集的性质 6.

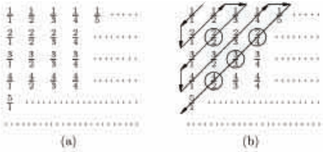
命题1

有理数集 $\mathbb{Q}$ 为可列集.

证: 先将正有理数集

$$\mathbb{Q}_+ = \{x = \frac{q}{p} \mid p, q \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$$

中的元如图(a) 中那样按分子 q 依次排成行,



然后按图(b) 中的线将 $\mathbb{Q}_+$ 排序, 也就是建立它与 $\mathbb{N}$ 之间的一一对应,

但跳过此前已经出现的数, 这在图中用圆圈标出. 这就证明了集合 $\mathbb{Q}_+$ 是可列集. 这种方法称为对角线方法.

$$\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, 5, \cdots\},$$

然后将 $\mathbb{Q}$ 中的元排序为

$$\mathbb{Q} = \{0, -1, 1, -2, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots, \},$$

这样就证明了 $\mathbb{Q}$ 的可列性. □

注1

在这个结论确立之后, 再利用可列集的性质 2, 就知道 $\mathbb{Q}$ 的任何无限子集为可列集.

最后要指出, 存在不可列集. 例如, 实数全体所成集合 $\mathbb{R}$ 就是不可列集. 这将在本书第二章的 §2.3.10 小节中给出证明.

三. 若干逻辑符号

今后经常使用以下记号:

$$P \iff Q$$

表示命题 P 成立的充分必要条件是命题 Q 成立,

$$P \Longrightarrow Q$$

表示若 P 成立, 则 Q 成立.

三. 若干逻辑符号

今后经常使用以下记号:

$$P \iff Q$$

表示命题 P 成立的充分必要条件是命题 Q 成立,

$$P \Longrightarrow Q$$

表示若 P 成立, 则 Q 成立.

记号 $\forall$ 是将英文大写字母 A 绕其中心点旋转 180° 而成的一个逻辑符号, 它的意思是“每一个”,“所有”,“任意一个”.

三. 若干逻辑符号

今后经常使用以下记号:

$$P \Longleftrightarrow Q$$

表示命题 P 成立的充分必要条件是命题 Q 成立,

$$P \Longrightarrow Q$$

表示若 P 成立, 则 Q 成立.

记号 $\forall$ 是将英文大写字母 A 绕其中心点旋转 180° 而成的一个逻辑符号, 它的意思是“每一个”,“所有”,“任意一个”.

记号 $\exists$ 是将英文大写字母 E 绕其中心点旋转 180° 而成的一个逻辑符号, 它的意思是“存在”,“有”.

例1

$$A \not\subset B \Longleftrightarrow \exists x \in A,\ \text{使得}\ x \notin B,$$
$$A \subset B \Longleftrightarrow \forall x \in A,\ \text{有}\ x \in B.$$

注2

在将 $\forall$ 理解为“任意”时，要注意这个“任意”是指能取到“每一个”的那种任意性，而不是随随便便“只取一个”的那种任意性. 因此建议今后尽可能将符号 $\forall$ 读为“每一个”.

1. 区间与邻域

在数学分析中用得最多的数集是各种区间. 首先是有界区间 (也称为有限区间):

1. 区间与邻域

在数学分析中用得最多的数集是各种区间. 首先是有界区间 (也称为有限区间):

1. 闭区间 $[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$,
2. 开区间 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$,
3. 左闭右开区间 $[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$,
4. 左开右闭区间 $(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$,

其中设 a,b 为实数, 且满足 $a\leqslant b$.

1. 区间与邻域

在数学分析中用得最多的数集是各种区间. 首先是有界区间 (也称为有限区间):

1. 闭区间 $[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$,
2. 开区间 $(a,b)=\{x \mid a < x < b\}$,
3. 左闭右开区间 $[a,b)=\{x \mid a \leqslant x < b\}$,
4. 左开右闭区间 $(a,b]=\{x \mid a < x \leqslant b\}$,

其中设 a,b 为实数, 且满足 $a \leqslant b$.

在教科书中还提出用记号 $<a,b>$ 泛指以上的四种区间. 这在有些场合确实带来方便.

例如某个论断对以上四种区间都成立时就是如此. 但需要指出, 这个记号不是数学文献中普遍使用的记号.

我们还经常要用到无界区间 (也称无限区间), 它们是

例如某个论断对以上四种区间都成立时就是如此. 但需要指出, 这个记号不是数学文献中普遍使用的记号.

我们还经常要用到无界区间 (也称无限区间), 它们是

5. $[a, +\infty) = \{x \mid a \leqslant x\}$,
6. $(a, +\infty) = \{x \mid a < x\}$,
7. $(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}$,
8. $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$,
9. $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

例如某个论断对以上四种区间都成立时就是如此. 但需要指出, 这个记号不是数学文献中普遍使用的记号.

我们还经常要用到无界区间 (也称无限区间), 它们是

5. $[a,+\infty) = \{x \mid a \leqslant x\}$,
6. $(a,+\infty) = \{x \mid a < x\}$,
7. $(-\infty,b] = \{x \mid x \leqslant b\}$,
8. $(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$,
9. $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

与前面类似, 第 5 种和第 6 种区间可以统一记为 $< a,+\infty)$, 第 7 种和第 8 种区间可以统一记为 $(-\infty,b >$.

此外, 在今后还需要使用特殊类型的区间, 即邻域. 最常用的邻域是

此外, 在今后还需要使用特殊类型的区间, 即邻域. 最常用的邻域是

$$O_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\},$$

称为点 a 的 δ 邻域. 我们称 a 为邻域 $O_\delta(a)$ 的中心, 称 δ 为邻域 $O_\delta(a)$ 的半径.

此外, 在今后还需要使用特殊类型的区间, 即邻域. 最常用的邻域是

$$O_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\},$$

称为点 a 的 δ 邻域. 我们称 a 为邻域 $O_\delta(a)$ 的中心, 称 δ 为邻域 $O_\delta(a)$ 的半径.

除了记号 $O_\delta(a)$ 之外, 记号 $U_\delta(a)$ 也是经常使用的, 两者完全等价. 又在邻域半径大小并不重要时, 也用 $O(a)$ 或 $U(a)$ 来表示以 a 为中心半径大于 0 的一个邻域.

此外, 在今后还需要使用特殊类型的区间, 即邻域. 最常用的邻域是

$$O_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\},$$

称为点 a 的 δ 邻域. 我们称 a 为邻域 $O_\delta(a)$ 的中心, 称 δ 为邻域 $O_\delta(a)$ 的半径.

除了记号 $O_\delta(a)$ 之外, 记号 $U_\delta(a)$ 也是经常使用的, 两者完全等价. 又在邻域半径大小并不重要时, 也用 $O(a)$ 或 $U(a)$ 来表示以 a 为中心半径大于 0 的一个邻域.

注意, 以上的邻域一定是开区间. 教科书中还介绍了闭邻域和去心邻域, 这些都可以到需要用时再说.

2. 最大数与最小数

这里要注意, 书上用 $\max(a,b)$ 表示两个数 a 和 b 中较大的一个, 即两个数中的最大数, 这不是一种好的记号. 在这样的记号中容易将 (a,b) 与开区间相混淆, 因此建议今后改用记号

$$\max\{a,b\}$$

作为最大数的记号, 不要用记号 $\max(a,b)$. 这与大多数文献也是一致的. 同样建议在今后用

$$\min\{a,b\}$$

作为最小数的记号, 而不用书中的记号 $\min(a,b)$.

2. 最大数与最小数

这里要注意, 书上用 $\max(a,b)$ 表示两个数 a 和 b 中较大的一个, 即两个数中的最大数, 这不是一种好的记号. 在这样的记号中容易将 (a,b) 与开区间相混淆, 因此建议今后改用记号

$$\max\{a,b\}$$

作为最大数的记号, 不要用记号 $\max(a,b)$. 这与大多数文献也是一致的. 同样建议在今后用

$$\min\{a,b\}$$

作为最小数的记号, 而不用书中的记号 $\min(a,b)$.

虽然最大数和最小数的概念是简单的, 但需要注意的重要问题是, 一个数集未必有最大数或最小数. 下面就是一个例子.

例2

证明: 数集 $A = [0, 1)$ 无最大数.

证: 用反证法. 若 A 有最大数, 将它记为 β, 则有 $0 \leqslant \beta < 1$, 且 $\forall x \in [0, 1)$, 成立 $x \leqslant \beta$.

令 $\alpha = \dfrac{1+\beta}{2}$, 则一方面有 $\alpha \in A$, 另一方面又有

$$\beta < \alpha = \frac{1+\beta}{2} \iff \beta < 1,$$

这与 β 是 A 的最大数相矛盾. □

3. 上界与下界

定义2

称数 M 是非空数集 A 的一个上界, 若

$$\forall x \in A,\ \text{有}\ x \leqslant M;$$

称数 m 是非空数集 A 的一个下界, 若

$$\forall x \in A,\ \text{有}\ x \geqslant m.$$

3. 上界与下界

定义2

称数 M 是非空数集 A 的一个上界, 若

$$\forall x \in A, \text{ 有 } x \leqslant M;$$

称数 m 是非空数集 A 的一个下界, 若

$$\forall x \in A, \text{ 有 } x \geqslant m.$$

例如, 对数集 $A = [0, 1)$ 来说, 数 1 是 A 的一个上界. 当然, 这时比 1 大的每个实数都是 A 的上界. 又可以看出, 数 0 是 A 的下界, 同时每个负数也都是 A 的下界. 对于一般的非空数集也是如此, 有一个上界就必有无限多个上界, 有一个下界就必有无限多个下界.

定义3

有上界的非空数集称为上有界集, 有下界的非空数集称为下有界集, 同时有上界和下界的非空数集称为有界集. 一个不是有界集的非空数集称为无界集.

定义3

有上界的非空数集称为上有界集, 有下界的非空数集称为下有界集, 同时有上界和下界的非空数集称为有界集. 一个不是有界集的非空数集称为无界集.

由这个定义可知, 无界集或者没有上界, 或者没有下界, 二者至少居其一. 例如, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ 都是无界集, 其中 $\mathbb{N}, \mathbb{R}_+$ 有下界而无上界, 其余几个既无上界又无下界.

下面是一个有用的命题.

命题2

非空数集 A 有界 $\iff \exists K>0, \forall x\in A$, 有 $|x|\leqslant K$.

证: 充分性 ($\Longleftarrow$). 这时 $\forall x\in A$, 有 $-K\leqslant x\leqslant K$, 因此 $-K$ 是 A 的下界, K 是 A 的上界, 因此 A 是有界集.

必要性 ($\Longrightarrow$). 从 A 有界, 存在 m, M, 使得 $\forall x\in A$, 成立

$$m\leqslant x\leqslant M.$$

利用

$$-|m|\leqslant m\leqslant x\leqslant M\leqslant |M|,$$

可见只要取 $K=\max\{|m|,|M|\}$, 就有

$$-K\leqslant -|m|\leqslant x\leqslant |M|\leqslant K,$$

这就是 $|x|\leqslant K$, 而且对每个 $x\in A$ 成立. $\square$

4. 上确界与下确界

确界在第一章中是一个全新的概念, 它与数学分析的其他内容有密切联系.

回顾前面的最大数和最小数, 上界和下界, 它们都是对于非空数集的刻画, 但也都有缺点. 我们已经知道, 对一个非空数集来说, 上界或下界存在时一定不惟一, 最大数或最小数一定惟一, 但不一定存在.

4. 上确界与下确界

确界在第一章中是一个全新的概念, 它与数学分析的其他内容有密切联系.

回顾前面的最大数和最小数, 上界和下界, 它们都是对于非空数集的刻画, 但也都有缺点. 我们已经知道, 对一个非空数集来说, 上界或下界存在时一定不惟一, 最大数或最小数一定惟一, 但不一定存在.

下面我们会看到, 这一小节引入的确界概念克服了二者的不足, 从而为数集的刻画提供了更为有力的工具.

4. 上确界与下确界

确界在第一章中是一个全新的概念, 它与数学分析的其他内容有密切联系.

回顾前面的最大数和最小数, 上界和下界, 它们都是对于非空数集的刻画, 但也都有缺点. 我们已经知道, 对一个非空数集来说, 上界或下界存在时一定不惟一, 最大数或最小数一定惟一, 但不一定存在.

下面我们会看到, 这一小节引入的确界概念克服了二者的不足, 从而为数集的刻画提供了更为有力的工具.

定义4 (确界的第一定义)

称非空数集 A 的最小上界为上确界, 记为 $\sup A$; 称非空数集 A 的最大下界为下确界, 记为 $\inf A$.

先看一个例子: $A = [0, 1)$. 已知它没有最大数, 但有上界. 可以看出 1 就是 A 的最小上界, 因此 $\sup A = 1$. 又可以看出, $\inf A = 0$, 同时也有 $\min A = 0$.

先看一个例子: $A = [0, 1)$. 已知它没有最大数, 但有上界. 可以看出 1 就是 A 的最小上界, 因此 $\sup A = 1$. 又可以看出, $\inf A = 0$, 同时也有 $\min A = 0$.

从这个例子可以看出, 如果一个数集有上界, 则一定有无限多个上界. 它们构成一个非空数集. 对 $A = [0, 1)$ 而言, 它的上界全体就是数集 $[1, +\infty)$, 而上确界就是这个数集的最小数.

先看一个例子: $A=[0,1)$. 已知它没有最大数, 但有上界. 可以看出 1 就是 A 的最小上界, 因此 $\sup A=1$. 又可以看出, $\inf A=0$, 同时也有 $\min A=0$.

从这个例子可以看出, 如果一个数集有上界, 则一定有无限多个上界. 它们构成一个非空数集. 对 $A=[0,1)$ 而言, 它的上界全体就是数集 $[1,+\infty)$, 而上确界就是这个数集的最小数.

一般而言, 由于上确界是上界集合的最小数, 因此如果存在, 必定惟一. 对于下确界也有同样的结论. 可见确界与上界下界不一样, 若存在必定惟一.

从 $A=[0,1)$ 的讨论又可以看出, 若一个数集 A 有最小数,则就有 $\inf A=\min A$. 同样可见, 若一个数集 A 有最大数, 则就有 $\sup A=\max A$.

从 $A=[0,1)$ 的讨论又可以看出, 若一个数集 A 有最小数,则就有 $\inf A=\min A$. 同样可见, 若一个数集 A 有最大数, 则就有 $\sup A=\max A$.

问题在于, 若一个非空数集没有最大数时, 是否存在上确界? 同样, 若一个非空数集没有最小数时, 是否存在下确界.

从 $A=[0,1)$ 的讨论又可以看出, 若一个数集 A 有最小数,则就有 $\inf A=\min A$. 同样可见, 若一个数集 A 有最大数, 则就有 $\sup A=\max A$.

问题在于, 若一个非空数集没有最大数时, 是否存在上确界? 同样, 若一个非空数集没有最小数时, 是否存在下确界.

对于无上界的数集来说, 答案是清楚的. 一个数集既然没有上界, 则谈不上会有什么最小的上界. 例如 $(a,+\infty)$ 就是如此, 它没有最大数, 也没有上确界.

同样, 无下界的数集既没有最小数, 也没有下确界.

注3

教科书 *p.12* 末对无上界数集 A 记 $\sup A = +\infty$. 对无下界数集 A 记 $\inf A = -\infty$, 只不过是同语反复的一种约定, 没有带给我们任何新知识.

注3

教科书 *p.12* 末对无上界数集 A 记 $\sup A = +\infty$. 对无下界数集 A 记 $\inf A = -\infty$, 只不过是同语反复的一种约定, 没有带给我们任何新知识.

余下的问题就是有上界的数集在无最大数时是否有上确界? 同样, 有下界的数集在无最小数时是否有下确界?

注3

教科书 *p.12* 末对无上界数集 A 记 $\sup A = +\infty$. 对无下界数集 A 记 $\inf A = -\infty$, 只不过是同语反复的一种约定, 没有带给我们任何新知识.

余下的问题就是有上界的数集在无最大数时是否有上确界? 同样, 有下界的数集在无最小数时是否有下确界?

这个问题由下面的基本定理得到完全的解决.

定理2

在实数集 $\mathbb{R}$ 中的非空数集, 若有上界, 则必有上确界; 若有下界, 则必有下确界.

注3

教科书 *p.12* 末对无上界数集 A 记 $\sup A = +\infty$. 对无下界数集 A 记 $\inf A = -\infty$, 只不过是同语反复的一种约定, 没有带给我们任何新知识.

余下的问题就是有上界的数集在无最大数时是否有上确界? 同样, 有下界的数集在无最小数时是否有下确界?

这个问题由下面的基本定理得到完全的解决.

定理2

在实数集 $\mathbb{R}$ 中的非空数集, 若有上界, 则必有上确界; 若有下界, 则必有下确界.

目前我们还不能证明这个定理. 实际上我们以后会知道, 这个确界存在定理是实数系的基本定理之一. 目前先承认它就可以了.

小结 于是确界的存在性和惟一性问题都有了满意的答案. 其中存在性问题由确界存在定理解决, 惟一性问题则由确界的定义而保证成立. 这样确界就克服了最大数、最小数与上界、下界的缺点，而为刻画数集提供了更为有力的工具. 当然如何运用确界概念还要在今后通过许多实例才能明白.

小结　于是确界的存在性和惟一性问题都有了满意的答案. 其中存在性问题由确界存在定理解决, 惟一性问题则由确界的定义而保证成立. 这样确界就克服了最大数、最小数与上界、下界的缺点，而为刻画数集提供了更为有力的工具. 当然如何运用确界概念还要在今后通过许多实例才能明白.

为了运用确界概念我们还需要确界的另一个定义, 它更便于具体操作.

小结　于是确界的存在性和惟一性问题都有了满意的答案. 其中存在性问题由确界存在定理解决, 惟一性问题则由确界的定义而保证成立. 这样确界就克服了最大数、最小数与上界、下界的缺点，而为刻画数集提供了更为有力的工具. 当然如何运用确界概念还要在今后通过许多实例才能明白.

为了运用确界概念我们还需要确界的另一个定义, 它更便于具体操作.

定义5 (确界第二定义)

称数 β 为非空数集 A 的上确界, 如果满足以下两个条件:

(1) $\forall\, x \in A$, 有 $x \leqslant \beta$ (即 β 是数集 A 的一个上界);

(2) $\forall\, \beta' < \beta$, $\exists\, x' \in A$, 使得 $\beta' < x'$ (即比 β 小的数 β' 不会是 A 的上界).

定义5 (确界第二定义)

称数 β 为非空数集 A 的上确界, 如果满足以下两个条件:

(1) $\forall x \in A$, 有 $x \leqslant \beta$ (即 β 是数集 A 的一个上界);

(2) $\forall \beta' < \beta$, $\exists x' \in A$, 使得 $\beta' < x'$ (即比 β 小的数 β' 不会是 A 的上界).

也可以将条件 (2) 换为下列等价条件:

(2)$'$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x' \in A$, 使得 $\beta - \varepsilon < x'$ (即比 β 小的数 $\beta - \varepsilon$ 不会是 A 的上界).

同样, 称数 α 为数集 A 的下确界, 如果满足以下两个条件:

同样, 称数 α 为数集 A 的下确界, 如果满足以下两个条件:

(1) $\forall x \in A$, 有 $\alpha \leqslant x$ (即 α 是数集 A 的一个下界);
(2) $\forall \alpha' > \alpha$, $\exists x' \in A$, 使得 $x' < \alpha'$ (即比 α 大的数 α' 不会是 A 的下界).

同样, 称数 α 为数集 A 的下确界, 如果满足以下两个条件:

(1) $\forall x \in A$, 有 $\alpha \leqslant x$ (即 α 是数集 A 的一个下界);
(2) $\forall \alpha' > \alpha$, $\exists x' \in A$, 使得 $x' < \alpha'$ (即比 α 大的数 α' 不会是 A 的下界).

也可以将条件 (2) 换为下列等价条件:

$(2)'$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x' \in A$, 使得 $x' < \alpha + \varepsilon$ (即比 α 大的数 $\alpha + \varepsilon$ 不会是 A 的下界).

现在举两个例子

例3

1 有非空数集 A, B, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, 有 $x \leqslant y$, 证明: $\sup A \leqslant \sup B$.

证: 取定一个 $y \in B$, 从条件 $\forall x \in A$, $x \leqslant y$, 可见这个 y 就是数集 A 的一个上界. 根据确界存在定理, 存在 $\sup A$.

由于每个 $y \in B$ 都是 A 的上界, 而 $\sup A$ 是 A 的最小上界, 因此就有

$$\sup A \leqslant y \quad \forall y \in B. \tag{**}$$

由此看出, 数集 B 以 $\sup A$ 为其下界, 再次用确界存在定理, 知道存在 $\inf B$. 由于 (**) 表明 $\sup A$ 是 B 的一个下界, 而 $\inf B$ 是 B 的最大下界, 因此就得到

$$\sup A \leqslant \inf B. \quad \square$$

注4

在这个例题的证明中只需用确界的第一定义.

例4

2 设数集 A 有上界, 又定义数集

$$B = \{x + c \mid x \in A\},$$

其中 c 是一个常数, 证明: $\sup B = \sup A + c$.

证 从确界存在定理知道存在 $\sup A$.

根据数集 B 的定义, $\forall\, y \in B$, $\exists\, x \in A$, 使得 $y = x + c$. 因此就有

$$y = x + c \leqslant \sup A + c.$$

这表明 $\sup A + c$ 是数集 B 的一个上界.

再用确界存在定理, 数集 B 有上确界 $\sup B$, 且满足不等式

$$\sup B \leqslant \sup A + c. \tag{$\dagger$}$$

若取 $\beta' < \sup A + c$, 则有 $\beta' - c < \sup A$. 由于 $\beta' - c$ 不是 A 的上界, 因此 $\exists x' \in A$, 使得 $\beta' - c < x'$. 这就是 $\beta' < x' + c$. 由于 $x' + c \in B$, 因此 β' 不是 B 的上界.

既然每个 $\beta' < \sup A + c$ 都不是 B 的上界, 而从 (†) 已经知道 $\sup A + c$ 是 B 的一个上界, 因此它就是 B 的最小上界, 即得到所要求证的结论:

$$\sup B = \sup A + c. \quad \square$$