第四章 Hilbert 空间的几何学

在第一章中我们已介绍了内积空间的公理系统并给出过内积空间的例子.内积空间是一种特殊的线性赋范空间， 因此对于一般赋范空间成立的那些结论对于内积空间也是适用的. 但由于内积空间具有“内积”这种结构，使得它有着比一般赋范空间更为特殊的性质.本章将叙述这些特殊性质：正交基的存在性、正交投影以及空间上线性泛函和算子的特殊表现形式.Hilbert 空间的理论已广泛地应用于许多学科和学科分支中去，例如在量子力学，概率论， Fourier 分析，调和分析等学科中就是如此.近年来蓬勃发展的小波分析理论也是置根于 Hilbert 空间基本理论的.

第 19 讲 Hilbert 空间的正交基

教学目的：掌握由内积结构导致的 Hilbert 空间的特殊性质。

讲解要点：

1、正交集合的基本属性，Bessel 不等式。

2、Hilbert 空间中元素的 Fourier 展开。

3、正交基底。

4、可分 Hilbert 空间与 l^2 等距同构。

定义 1 设 H 是内积空间，$(\cdot,\cdot)$ 是其中的内积.

(1) 若 $x, y \in H, (x, y) = 0,$ 则称 x 与 y 正交，记为 $x \perp y$. 若 $M, N \subset H$ 并且 $\forall x \in M, y \in N$，$(x, y) = 0,$ 则称 M 与 N 正交，记为 $M \perp N$. 当 $M = \{x\}$ 时记为 $x \perp N$, .

(2) 称 $E \subset H$ 为正交集，若任意 $x, y \in E, x \neq y,$ 则 $x \perp y$. 若

此外 $(x,x)=1$, $\forall x \notin E$, 称 E 为规范正交集.

容易知道, $x \perp y$ 则 $y \perp x$, $x \perp x$ 当且仅当 $x=0$. 对于任意集合 $M,N \subset H$, 若 $M \perp N$, 则 $M \cap N \subset \{0\}$.

定理 1 设 H 为内积空间, $E \subset H$ 为正交集.则对于 E 中任意有限多个元 $x_1,\cdots,x_n$ 和 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n \in \Phi$,

$$\|\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n\|^2 \leq |\alpha_1|^2\|x_1\|^2+\cdots+|\alpha_n|^2\|x_n\|^2. \quad (4\text{-}1\text{-}1)$$

从而若 E 不包含 0 元, E 是线性无关集.

证明 由正交性

$$\begin{aligned}\|\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n\|^2 &= (\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n, \alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}(\alpha_i x_i, \alpha_j x_j) \\ &= |\alpha_1|^2\|x_1\|^2+\cdots+|\alpha_n|^2\|x_n\|^2.\end{aligned}$$

当 $x_i \neq 0 (i=1,\cdots,n)$ 时, 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 不全为 0, 则 $\|\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n\| \neq 0$, 即 $\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n \neq 0$.

定理 2 设 H 是内积空间, $E \subset H$ 是规范正交集, $x \in H$, 则

(1) 对于任一组 $e_1,\cdots,e_n \in E$,

$$\sum_{i=1}^{n} |(x,e_i)|^2 \leq \|x\|^2. \quad (4\text{-}1\text{-}2)$$

(2) 数集 $\{(x,e): e \in E\}$ 中至多有可数多个不等于 0.

证明 1° 设 $x_n=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$, 则

$$\begin{aligned}0 \leq \|x-x_n\|^2 &= (x-x_n, x-x_n) \\ &= \|x\|^2-(x,x_n)-(x_n,x)+\|x_n\|^2\end{aligned}$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2 .$$

故

$$\sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2 \le \|x\|^2 .$$

2° 考虑集合

$$E_j = \{e \in E : |(x, e)| > j^{-1}\}, \quad j = 1, 2, \cdots .$$

由(4-1-2)，E_j 中至多有有限多个元素，显然 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$，故得（2）。

推论 1 设 H 是内积空间，$E = \{e_n\}$ 是 H 中的规范正交集，则

（1） $\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \le \|x\|^2$. （Bessel 不等式）（4-1-3）

（2） $(x, e_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$。

实际上，令 $n \to \infty$，由(4-1-2 得到（4-1-3）.由级数的收敛性质 $|(x, e_n)|^2 \to 0$，故 $(x, e_n) \to 0$,（2）成立.

思考题

1. 设 H 是内积空间，$x, y_i \in H (i \ge 1)$，则

(1) $x \perp \overline{span}\{y_i : i \ge 1\}$ 当且仅当 $x \perp y_i \ (i \ge 1)$.

(2) $x \perp \overline{co}\{y_i : i \ge 1\}$ 当且仅当 $x \perp y_i \ (i \ge 1)$.

2. 设 H 是内积空间，$\{e_i, 1 \le i \le n\}$ 是 H 中的规范正交集，$x \in H$，则

$$f(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|$$

关于达到极小值当且仅当 $\alpha_i = (x, e_i)$，$1 \le i \le n$.

定义 2 设 H 为内积空间，$E = \{e_n\}$ 是 H 中的规范正交集,$x \in H$.

（1） 对于每个 $e_n \in E$，称 (x,e_n) 为 x 关于 e_n 的 Fourier 系数.

（2） 称（形式）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$ 为 x 关于 E 的 Fourier 级数.

（3） 若 $x=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$ 按空间 H 的范数收敛，称此级数为 x 关于 E 的 Fourier 展开式。

定理 3 设 H 为内积空间，$E=\{e_n\}$ 是 H 中的规范正交集，$x\in H$，

则以下诸条件等价：

（1） $x\in\overline{span}\,E$.

（2） $x=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\,e_n$.　　（4－1－4）

（3） $\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\,(x,e_n)\,|^2$. （Parseval 等式）　　（4－1－5）

证明 $(1)\Rightarrow(2)$ 不妨设 $u_n\in\operatorname{span}E$，$u_n=\sum_{i=1}^{k_n}\alpha_i e_i$，$u_n\to x$.

取 $x_n=\sum_{i=1}^{k_n}(x,e_i)e_i$，则 $(x_n,e_i)=(x,e_i)$，即 $e_i\perp x_n-x$（$i=1,\cdots,k_n$），

从而 $\sum_{i=1}^{k_n}(\alpha_i-(x,e_i))e_i\perp(x_n-x)$，即 $(u_n-x_n)\perp(x_n-x)$. 于是

$$\|u_n-x\|^2=\|u_n-x_n+x_n-x\|^2=\|u_n-x_n\|^2+\|x_n-x\|^2\ge\|x_n-x\|^2,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=\lim_{n\to\infty}\|u_n-x\|=0.$$

所以

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}(x,e_i)e_i=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n\,.$$

$(2)\Rightarrow(3)$　由（2），$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$ 或者 $x_n\to x$，由内积关于

变元的连续性知道

$$\|x\|^2=(x,x)=\lim_{n\to\infty}(x_n,x_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2 .$$

$(3)\Rightarrow(1)$　令 $x_n=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$，由（3），

$$\|x_n-x\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2=\sum_{i=n+1}^{\infty}|(x,e_i)|^2\to 0 .$$

故 $x=\lim_{n\to\infty}x_n$，但 $x_n\in\operatorname{span}E$，所以 $x\in\overline{span}\,E$。

定理 3 说明，要 x 关于正交集 E 的 Fourier 展开式成立，必须并且只要 x 属于由 E 张成的闭线性子空间或者 x 关于 E 的 Parseval 等式成立。

下面定理给出了得到规范正交集的方法。

定理 4 (Gram-Schmidt）设 $\{x_n\}$ 是内积空间 H 中一列线性无关元素，则存在 H 中的规范正交集 $E=\{e_n:n\geq 1\}$，使得 $\forall n\geq 1$，

$$\operatorname{span}\{e_i:1\leq i\leq n\}=\operatorname{span}\{x_i:1\leq i\leq n\}.$$

证明　由 $x_i\neq 0$，令 $y_1=x_1, e_1=\frac{y_1}{\|y_1\|}$. 显然

$$\operatorname{span}\{e_1\}=\operatorname{span}\{y_1\}=\operatorname{span}\{x_1\}.$$

由 x_2 与 x_1（从而与 e_1）线性无关，令 $y_2=x_2-(x_2,e_1)e_1, e_2=\frac{y_2}{\|y_2\|}$，则 $y_2\neq 0$. 又 $(y_2,e_1)=(x_2,e_1)-(x_2,e_1)=0$，从而 $(e_2,e_1)=\frac{1}{\|y_2\|}(y_2,e_1)=0$ 并且

$$\operatorname{span}\{e_1,e_2\}=\operatorname{span}\{x_1,x_2,e_1\}=\operatorname{span}\{x_1,x_2\}.$$

依照数学归纳法，不妨设 $e_1,\cdots,e_{n-1}$ 已定义并且

$$\operatorname{span}\{e_i:1\leq i\leq n-1\}=\operatorname{span}\{x_i:1\leq i\leq n-1\},$$

定义 $y_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1}(x_n, e_i)e_i, e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$，则 $y_n \neq 0$. 否则

$$x_n \in \operatorname{span}\{e_i : 1 \leq i \leq n-1\} = \operatorname{span}\{x_i : 1 \leq i \leq n-1\}$$

与线性无关性相矛盾. 当 $1 \leq i \leq n-1$ 时,

$$\begin{aligned}(y_n, e_j) &= (x_n, e_j) - \sum_{i=1}^{n-1}(x_n, e_i)(e_i, e_j) \\ &= (x_n, e_j) - (x_n, e_j) = 0.\end{aligned}$$

所以 $(e_n, e_j) = \frac{1}{\|y_n\|}(e_n, e_j) = 0$. 同时

$$\begin{aligned}span\{e_i : 1 \leq i \leq n\} &= span\{x_n, e_i : 1 \leq i \leq n-1\} \\ &= \operatorname{span}\{x_i, 1 \leq i \leq n\}.\end{aligned}$$

$\{e_n\}$即是所需要的序列.

定理 5（Riesz-Fischer） 设 H 是 Hilbert 空间，$E = \{e_n\}$是 H 的规范正交集. 对于任一标量序列 $\{\alpha_n\}$，$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2 < \infty$，存在 $x \in \overline{span}\, E$ 使得 $x = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$，并且 $\alpha_n = (x, e_n)$.

证明 令 $x_n = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$，由 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2 < \infty$ 知道 $m \geq n, n \to \infty$ 时,

$$\|x_n - x_m\|^2 = \left\|\sum_{i=n+1}^{m}\alpha_i e_i\right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m}|\alpha_i|^2 \to 0$$

$\{x_n\}$是 Cauchy 序列，H 完备，不妨设 $x = \lim_{n\to\infty} x_n$，则

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n, \quad x \in \overline{span}\, E$$

此外,

$$(x, e_i) = \lim_{n\to\infty}(x_n, e_i) = \alpha_i \; (i = 1, 2, \cdots).$$

故 $x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$.

定义 3 设 H 是内积空间，$E \subset H$ 是规范正交集.

(1) 称 E 是 H 的正交基，若 E 不能扩充为更大的规范正交集.

(2) 称 E 是完备正交集，若 $\forall x \in H$，记 $E_x = \{e_n, n \geq 1\}$ 是使 $(x,e) \neq 0$ 的 E 中元素全体，则 x 关于 E_x 的 Parseval 等式成立.

非 0 内积空间中规范正交集合以其包含关系构成半序集.根据 Zorn 引理，其中存在极大规范正交集. 换句话说，任一内积空间必存在正交基.

定理 6 设 H 是 Hilbert 空间，$E \subset H$ 是规范正交集，则以下条件等价:

(1) E 是 H 的正交基.

(2) $\overline{span}\, E = H$

(3) $\forall x \in H, x$ 关于 E_x 具有 Fourier 展开式.

(4) $\forall x \in H, x$ 关于 E_x 的 Parseval 等式成立.

(5) $\forall x, y \in H, (x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x,e_n)\overline{(y,e_n)}$. ($e_n \in E_x \cup E_y$).

(6) 若 $x \in H, x \perp E$, 则 $x = 0$.

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 若有 $x \in H \setminus \overline{span}\{E\}$，记 $E_x = \{e_n\}$. 由 Bessel 不等式，$\sum_{n=1}^{\infty} |(x,e_n)|^2 \leq \|x\|^2$. 根据 Riesz-Fischer 定理，$\exists y \in \overline{span}\{E_x\}$，$y = \sum_{n=1}^{\infty} (x,e_n)e_n$. 显然 $x \neq y$，设 $e_0 = \dfrac{x-y}{\|x-y\|}$，则 $e_0 \notin E$. 由于 $(x,e_n) = (y,e_n)$，所以 $e_n \perp e_0$ $(n = 1,2,\cdots)$.

对于每个 $e \in E \setminus E_x, (x,e) = 0$. 从而 $(e_n,e) = 0$，又 $(y,e) = 0$. 所以 $(e_0,e) = \dfrac{1}{\|x-y\|}[(x,e)-(y,e)] = 0$ $(\forall e \in E)$. 这说明 $E \cup \{e_0\}$ 是比 E 更大的规范正交集，与 E 为正交基矛盾.

(2)$\Leftrightarrow$(3)$\Leftrightarrow$(4). 这是定理 3 中 $E = H$ 的情况.

$(4) \Rightarrow (5)$. E_x, E_y 是可数集，故不妨设 $E_x \cup E_y = \{e_n : n \geq 1\}$. 允许某些系数为 0，我们仍可根据 E 的完备性得到

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}(e, e_n)e_n, \quad y = \sum_{n=1}^{\infty}(y, e_n)e_n.$$

从而

$$\begin{aligned}(x, y) &= (\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n, \sum_{n=1}^{\infty}(y, e_n)e_n) \\ &= \lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i, \sum_{i=1}^{n}(y, e_i)e_i) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x, e_i)\overline{(y, e_i)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)\overline{(y, e_n)} \qquad (4\text{-}1\text{-}6)\end{aligned}$$

$(5) \Rightarrow (6)$. 若 $x \in H, (x, e_n) = 0$, 由 (5), $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)\overline{(x, e_n)}$ $= 0$，故 $x = 0$.

$(6) \Rightarrow (1)$. 若有 $E \cup \{e_0\}$ 是 H 的规范正交集并且 $e_0 \notin E$，则 $e_0 \perp E$ 从而 e_0 关于 E 的 Fourier 系数全为 0 但 $e_0 \neq 0$，与(6)矛盾.

整个定理得证.

定理 6 中的(6)有时称为 E 的完全性. 当 H 不完备时，(6)不必与其他条件等价.

定理 7 设 H 是 Hilbert 空间，则

(1) H 可分当且仅当 H 有可数正交基.

(2) 当 H 的正交基有可数无穷多个元时，H 与 l^2 等距同构.

(3) 当 H 的正交基仅有有限多个元时，H 与 Φ^n 等距同构.

于是本质上说来，可分 Hilbert 空间要么是 l^2，要么是 Φ^n.

证明 1° 若 H 可分，设 $x_1, x_2, \cdots$ 是 H 中的可数稠密集. 从 x_1 开始，

凡与前面诸元素线性相关的元素皆删去，剩下元素的全体构成线性无关集．显然它的线性组合全体仍在 H 中稠密，利用 Gram-Schmidt 方法将它们正交化得到规范正交集 E，容易知道 $\overline{span}\{E\}=\overline{span}\{x_n\}=H$．由定理 6，$E$ 是 H 的正交基．E 中有可数多个元．

反之，若 H 的正交基有可数多个元，则其中任意有限多个元素的有理系数（或实部、虚部均为有理数的复系数）线性组合在 H 中稠密，这些元素的全体至多为可数集，故 H 可分．

2° 若 E 是可数无穷集，定义

$$\varphi: H\to l^2,\ \varphi(x)=((x,e_1),(x,e_2),\cdots),\ \forall x\in H$$

φ 是线性映射，由 Riesz-Fischer 定理，φ 是到上的．$\forall x,y\in H$，

$$\begin{aligned}(\varphi(x),\varphi(y)) &= \sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)\overline{(y,e_i)} \\ &= \lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i,\sum_{i=1}^{n}(y,e_i)e_i) \\ &= (\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i,\sum_{i=1}^{\infty}(y,e_i)e_i) \\ &= (x,y).\end{aligned}$$

特别地，若 $x=y$，则 $\|\varphi(x)\|=\|x\|$.，φ 是等距的一一映射，H 与 l^2 同构．

3° (3) 是 (2) 的特殊情况．

例 1 l^2 的标准基 $\{e_n:n\geq 1\}$ 是它的正交基．这里 e_n 的第 n 个坐标为 1，其余为 0．

例 2 考虑定义在 $[0,1]$ 上的 Rademacher 函数序列，

$$r_n(t)=sign\sin 2^n\pi t,\quad t\in[0,1]\quad n\geq 1$$

容易验证 $E=\{r_n(t):n\ge 1\}$ 是 $L^2[0,1]$ 中的正交集．但这一正交集不是完备的．事实上, $r_0(t)\equiv 1$ 与所有 $r_n(t)$ 正交但不属于上述集合，定理 6 (6) 说明 $\{r_n(t),n\ge 1\}$ 不完备 (即使添加 r_0 到 E 中仍得不到完备正交集).

为了得到由 E 扩展成的完备正交系，让我们考察 Haar 函数系．

$$h_0^{(0)}(t)=1,\quad 0\le t\le 1;$$

$$h_0^{(1)}(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,\frac{1}{2})\\ -1, & t\in[\frac{1}{2},1)\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

$$h_1^{(1)}(t)=\begin{cases}\sqrt{2}, & t\in[0,\frac{1}{4})\\ -\sqrt{2}, & t\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2})\\ 0 & \text{其他};\end{cases}$$

$$h_1^{(2)}(t)=\begin{cases}\sqrt{2}, & t\in[\frac{1}{2},\frac{3}{4})\\ -\sqrt{2}, & t\in[\frac{3}{4},1)\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

$$h_n^{(k)}(t)=\begin{cases}\sqrt{2^n}, & t\in\left[\frac{2k-2}{2^{n+1}},\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)\\ -\sqrt{2^n}, & t\in\left[\frac{2k-1}{2^{n+1}},\frac{2k}{2^{n+1}}\right)\\ 0, & \text{其他} .\end{cases}$$

$$k=1,2,\cdots,2^n,n=1,2,\cdots.$$

$\{h_n^{(k)}(t):1\le k\le 2^n,n=0,1,2,\cdots\}$ 的正交性容易直接验证．它还是规范正交系．为了验证它是完备的，由定理 6 (6)，只需验证 $\forall f\in L^2[0,1]$,

若 $(f,h_n^{(k)})=0,\forall k,n$，则 $f=0$.

实际上，由 $(f,h_n^{(k)})=0$ 可得出

$$\int_{\frac{2k-2}{2^{n+1}}}^{\frac{2k-1}{2^{n+1}}} f(t)dt=0, \qquad \int_{\frac{2k-1}{2^{n+1}}}^{\frac{2k}{2^{n+1}}} f(t)dt=0,$$

$k=1,2,\cdots,2^n, n=0,1,2,\cdots$. 定义

$$F(t)=\int_0^1 f(t)dt,$$

由 f 的可积性，$F(t)$ 是连续函数. 但上式表明

$$F(\frac{k}{2^n})=0, k=1,2,\cdots,2^n, n=0,1,2,\cdots.$$

这种点在 $[0,1]$ 上稠密，所以 $F(t)=0, 0\le t\le 1$，从而 $f(t)$ 几乎处处为 0. 故 Haar 函数系是 $L^2[0,1]$ 的完备正交基.

例 3 现在考虑复空间 $L^2[-\pi,\pi]$ 与集合 $\left\{ e^{\text{int}} : n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$.

容易验证

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\text{int}}\overline{e^{\text{int}}}dt=\begin{cases}0, & m\ne n,\\ 2\pi, & m=n.\end{cases}$$

于是 $E=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\text{int}} : n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$ 是 $L^2[-\pi,\pi]$ 的规范正交集. 我们验证 E 是正交基. 为此要证明，若 $x\in L^2[-\pi,\pi]$，

$$(x,e^{\text{int}})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-\text{int}}dt=0 \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

则 $x(t)=0, a.e.$

设 $y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{t} x(\tau)d\tau$. 由可积性，$y(t)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的绝对连续函数并且 $y'(t)=x(t), a.e.$ 注意到 $y(-\pi)=0, y(\pi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x,1)=0,$

于是

$$\int_{-\pi}^{\pi} y(t)e^{-\text{int}}dt=\frac{-1}{in}[y(t)e^{-\text{int}}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi} y'(t)e^{-\text{int}}dt]$$

$$= \frac{-1}{in}[-e^{-in\pi} y(\pi) + e^{in\pi} y(-\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-\mathrm{int}} dt]$$

$$= 0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

令 $\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t)dt$. 则当 $n = 0$ 时,

$$\int_{-\pi}^{\pi} [y(t) - \alpha] e^{-\mathrm{int}} dt = \int_{-\pi}^{\pi} y(t) dt - 2\pi\alpha = 0.$$

若 $n \neq 0$, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi} [y(t) - \alpha] e^{-\mathrm{int}} dt = \int_{-\pi}^{\pi} y(t) e^{-\mathrm{int}} dt - \alpha \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{int}} dt = 0.$$

$y(t) - \alpha$ 是连续函数，根据 Weierstrass 定理, $\forall \varepsilon > 0$, 存在三角多项式 $s(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{-ikt}$，使得

$$\left| y(t) - \alpha - s(t) \right| < \varepsilon, \forall t \in [-\pi, \pi].$$

于是

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| y(t) - \alpha \right|^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} (y(t) - \alpha) \overline{(y(t) - \alpha)} dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (y(t) - \alpha) \overline{(y(t) - \alpha - s(t))} dt$$

$$< \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} \left| y(t) - \alpha \right| dt \le \varepsilon \sqrt{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| y(t) - \alpha \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

即

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| y(t) - \alpha \right|^2 dt \le 2\pi\varepsilon^2.$$

$\varepsilon > 0$ 是任意的，故只有 $y(t) = \alpha$，从而 $x(t) = y'(t) = 0, a.e.$

推论 2 $\forall x \in L^2[-\pi, \pi]$, 记 $\hat{x}(n) = (x, e_n)$，其中 $e_n = e^{\mathrm{int}}$，则

（1） $x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{x}(n)e_n$ 以 $L^2[-\pi,\pi]$ 范数收敛.

（2） $\|x\|_2^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{x}(n)\right|^2$.

思考题 设 $D=\{|z|<1\}$ 是复平面中的单位圆，$H^2(D)$ 的定义如第一章习题 20，验证 $e_n(z)=\sqrt{\frac{n}{\pi}}z^{n-1}$（$n\geq 1$）是 $H^2(D)$ 的规范正交基.