第五章 微分与不定积分

在数学分析课程中我们知道，微分与积分具有密切的联系．一方面，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则对任意 $x\in[a,b]$ 成立 $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$．另一方面，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，并且 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 是 Riemann 可积的，则成立牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a).$$

本章将利用 Lebesgue 积分的理论证明对一类更一般的函数成立相应的结果．本章所讨论的函数都是定义在区间上的实值函数(不取 $\pm\infty$ 为值)．凡本章所涉及到的可测性，测度和几乎处处等概念都是关于 Lebesgue 测度空间 $(\boldsymbol{R}^1,\ \mathcal{M}(\boldsymbol{R}^1),\ m)$ 而言的.

§5.1 单调函数的可微性

> **教学目的** 本节将证明 Vitali 覆盖定理和单调函数的可微性定理.
>
> **本节要点** 单调函数是最简单的函数之一，它具有一系列良好的性质．单调函数是 L 可积的并且几乎处处可微．Vitali 覆盖定理不仅是证明单调函数的可微性定理的基础，它本身也是一个重要的结果.

设 f 是定义在 $\boldsymbol{R}^1$ 的区间 I 上的实值函数．若对任意 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时,总有

$$f(x_1)\le f(x_2),\quad (\text{或 } f(x_1)\ge f(x_2)),$$

则称 f 在 I 上是单调增加的(相应地，单调减少的)．单调增加的和单调减少的函数统称为单调函数．若 f 在 I 上是单调函数，则容易知道对任意 $x_0\in I$，f 在 x_0 的左右单侧极限 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$ 都存在．因此单调函数的间断点只能是第一类间断点.

定理 1 设 f 是定义在区间 $[a,b]$ 上的单调函数，则 f 的不连续点的全体至多是可数集.

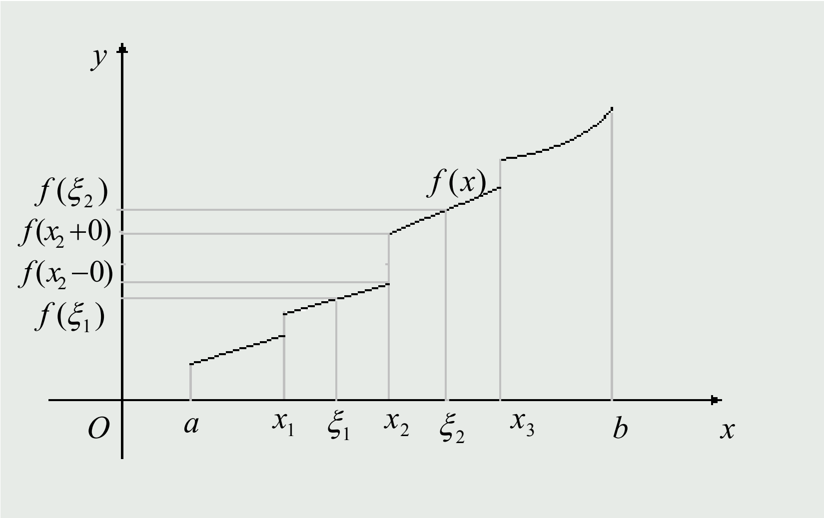
证明 不妨只考虑 f 是单调增加的情形．令

$$A=\{x: f \text{ 在} x \text{点不连续}\}.$$

$$A_n=\{x: f(x+0)-f(x-0)\ge \frac{1}{n}\},\quad n\ge 1.$$

则 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$．往证每个 A_n 是有限集．设 $x_1,\cdots,x_k\in A_n$，不妨设 $x_i<x_{i+1}$，$i=1,\cdots,k-1$．在 $[a,b]$ 中取 $\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_k$ 使得 $\xi_0=a$，$\xi_k=b$，$x_i<\xi_i<x_{i+1}\ (i=1,,k-1)$．由于 f 是单调增加的，因此成立

$$f(\xi_{i-1}) \le f(x_i - 0) \le f(x_i + 0) \le f(\xi_i),\ i = 1, \cdots, k.$$



(如图)因此

$$\frac{k}{n} \le \sum_{i=1}^{k}(f(x_i+0) - f(x_i-0)) \le \sum_{i=1}^{k}(f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})) = f(b) - f(a).$$

故必有 $k \le n(f(b) - f(a))$. 即 A_n 是有限集. 由此知道 A 是可数集.■

推论 2 设 f 是定义在区间 $[a,b]$ 上的单调函数, 则 f 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的, 因而也是 Lebesgue 可积的.

证明 由定理 1, f 的不连续点的全体至多是一可数集, 因而是 Lebesgue 零测度集. 由 §4.4 定理 2 知道 f 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的, 因而也是 Lebesgue 可积的.

下面我们讨论单调函数的可导性. 为此需要先作一些准备.

定义 3 设 E 是 $\boldsymbol{R}^1$ 的子集, $\mathcal{G} = \{I_\alpha\}$ 是一族区间(I_α 可以是开的, 闭的或半开半闭的, 但不能退化为单点集). 若对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $x \in E$, 存在 $I_\alpha \in \mathcal{G}$, 使得 $x \in I_\alpha$ 并且 $|I_\alpha| < \varepsilon$, 则称 $\mathcal{G}$ 为 E 的一个 Vitali 覆盖.

引理 4 (Vitali 覆盖定理)设 $E \subset \boldsymbol{R}^1$, 其 Lebesgue 外测度 $m^*(E) < +\infty$, $\mathcal{G}$ 是 E 的一个 Vitali 覆盖. 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有限个互不相交的区间 $I_1, \cdots, I_n \in \mathcal{G}$, 使得

$$m^*(E - \bigcup_{i=1}^{n} I_i) < \varepsilon.$$

证明 由于对任意 $I_1, \cdots, I_n \in \mathcal{G}$, $I_1, \cdots, I_n$ 的端点的全体是一个 L 零测度集, 故不妨设 $\mathcal{G}$ 中的每个区间都是闭区间. 由于 $m^*(E) < +\infty$, 由§2.3 定理 5 容易知道, 存在开集 $G \supset E$ 使得 $m(G) < +\infty$. 又不妨设 $\mathcal{G}$ 中的每个区间均包含在 G 中, 否则用

$\mathcal{G}_1 = \{I : I \in \mathcal{G}\text{并且}I \subset G\}$ 代替 $\mathcal{G}$. 若存在 $\mathcal{G}$ 中的有限个区间 $I_1, \cdots, I_n$ 使得 $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, 则 $m^*(E - \bigcup_{i=1}^{n} I_i) = 0$. 此时定理的结论当然成立. 现在设对任意 $I_1, \cdots, I_n \in \mathcal{G}$, $E \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$. 在 G 中任取一个区间记为 I_1. 假定 $I_1, \cdots, I_k$ 已经选取. 由于 $E - \bigcup_{i=1}^{k} I_i \neq \varnothing$, 故至少存在一个 $I \in \mathcal{G}$, 使得 I 与 $I_1, \cdots, I_k$ 都不相交(为什么?). 令

$$\lambda_k = \sup\{|I| : I \in \mathcal{G}, I \cap I_i = \varnothing, i = 1, \cdots, k\}.$$

既然 $\mathcal{G}$ 中的每个区间 I 都包含于 G 中, 故 $\lambda_k \le m(G) < +\infty$. 在 $\mathcal{G}$ 中选取一个区间 I_{k+1} 使

$$|I_{k+1}| > \frac{1}{2}\lambda_k, \quad I_{k+1} \cap I_i = \varnothing, \ i = 1, \cdots, k. \tag{1}$$

继续这个过程, 我们就得到 $\mathcal{G}$ 中的一列互不相交的区间 $\{I_k\}$, 使得对每个 $k \ge 1$ 满足(1). 由于 $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \subset G$, 因此有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \le m(G) < +\infty. \tag{2}$$

于是存在一个 n 使得 $\sum_{k=n+1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon/5$. 令 $A = E - \bigcup_{k=1}^{n} I_k$. 若能证明 $m^*(A) < \varepsilon$, 则引理就得证. 设 $x \in A$. 由于 $\bigcup_{k=1}^{n} I_k$ 是闭集并且 $x \notin \bigcup_{k=1}^{n} I_k$, 故存在一个区间 $I \in \mathcal{G}$ 使得 I 包含 x 并且与 $I_1, \cdots, I_n$ 都不相交. 若进一步 I 与 $\{I_k\}_{k>n}$ 中的每个区间都不相交, 则对任意 $k > n$ 均有 $|I| \le \lambda_k < 2|I_{k+1}|$. 由(2)知道当 $k \to \infty$ 时 $|I_k| \to 0$, 于是 $|I| = 0$. 但这是不可能的. 因此 I 必与 $\{I_k\}_{k>n}$ 中的某个区间相交. 令 $k_0 = \min\{k : I \cap I_k \neq \varnothing\}$. 则 $k_0 > n$ 并且 $|I| \le \lambda_{k_0 - 1} < 2|I_{k_0}|$. 记 I_{k_0} 的中心为 x_{k_0}, 半径为 r_{k_0}. 由于 $x \in I$ 并且 $I \cap I_{k_0} \neq \varnothing$, 故 x 与 x_{k_0} 的距离

$$d(x, x_{k_0}) \le |I| + \frac{1}{2}|I_{k_0}| \le 2|I_{k_0}| + \frac{1}{2}|I_{k_0}| = \frac{5}{2}|I_{k_0}|.$$

于是 $x \in J_{k_0} = [x_{k_0} - 5r_{k_o}, x_{k_0} + 5r_{k_o}]$. 对每个 $I_k \in \{I_k\}_{k>n}$, 令 J_k 是与 I_k 有相同的中心且长度为 I_k 的 5 倍的区间, 则由上面所证知道 $A \subset \bigcup_{k=n+1}^{\infty} J_k$. 因此

$$m^*(A) \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |J_k| = 5\sum_{k=n+1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

设 f 在 $x_0 \in \boldsymbol{R}^1$ 的某一邻域内有定义的实值函数. 令

$$D^+ f(x_0) = \overline{\lim_{h\to 0+}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad D^- f(x_0) = \overline{\lim_{h\to 0-}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$D_+ f(x_0) = \underline{\lim_{h\to 0+}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad D_- f(x_0) = \underline{\lim_{h\to 0-}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

(上述极限值均允许为 $\pm\infty$). 分别称它们为 f 在 x_0 点的右上导数, 左上导数, 右下导数和左下导数. 从定义知道一般地成立

$$D^+ f(x_0) \ge D_+ f(x_0),\ D^- f(x_0) \ge D_- f(x_0). \tag{3}$$

显然 f 在 x_0 点可导当且仅当

$$D^+ f(x_0) = D_+ f(x_0) = D^- f(x_0) = D_- f(x_0) \ne \pm\infty.$$

定理 5 设 f 是定义在区间 $[a,b]$ 上的单调增加的实值函数. 则 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处可导. 其导数 f' 在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积并且成立

$$\int_a^b f'(x)dx \le f(b)-f(a). \tag{4}$$

证明 我们先证明在 (a,b) 上几乎处处成立

$$D^+ f = D_+ f = D^- f = D_- f. \tag{5}$$

令 $E_1 = \{D^+ f > D_- f\}$. 则 $E_1 = \bigcup_{r,s\in\mathcal{Q}} \{D^+ f > r > s > D_- f\}$. 其中 $\mathcal{Q}$ 为有理数集. 我们要证明 $m^*(E_1)=0$, 为此只需证明对任意 $r,s\in\mathcal{Q}$, $m^*(\{D^+ f > r > s > D_- f\})=0$. 记 $A=\{D^+ f > r > s > D_- f\}$. 对任意 $\varepsilon>0$, 存在开集 $G\supset A$ 使得 $m(G)<m^*(A)+\varepsilon$. 对任意 $x\in A$, 由于 $D_- f(x)<s$, 故存在 $h>0$ 使得 $[x-h,x]\subset G$ 并且

$$f(x)-f(x-h)<sh. \tag{6}$$

所有这样的区间 $[x-h,h]$ 构成了 A 的一个 Vatali 覆盖. 由引理 4, 存在有限个互不相交的这样的区间 $I_i=[x_i-h_i,x_i]$, $i=1,\cdots,n$, 使得 $m^*(A-\bigcup_{i=1}^n I_i)<\varepsilon$. 令 $B=A\cap\bigcup_{i=1}^n I_i^\circ$, 则

$$m^*(A)\le m^*(A\cap\bigcup_{i=1}^n I_i^\circ)+m^*(A-\bigcup_{i=1}^n I_i^\circ)<m^*(B)+\varepsilon. \tag{7}$$

由(6)式我们有

$$\sum_{i=1}^n (f(x_i)-f(x_i-h_i))<s\sum_{i=1}^n h_i<sm(G)<s(m^*(A)+\varepsilon). \tag{8}$$

对每个 $y\in B$, 由于 $D^+ f(y)>r$, 故存在 $k>0$, 使得区间 $[y,y+k]$ 包含在某个区间 I_i°

内并且

$$f(y+k)-f(y)>rk. \tag{9}$$

所有这样的区间$[y, y+k]$构成了B的一个Vatali覆盖. 再次应用引理4, 存在有限个互不相交的这样的区间$J_i=[y_i, y_i+k_i], i=1,\cdots,p$, 使得$m^*(B-\bigcup_{i=1}^{p}J_i)<\varepsilon$. 利用(7)得

$$m^*(A)<m^*(B)+\varepsilon \le m^*(B\cap\bigcup_{i=1}^{p}J_i)+m^*(B-\bigcup_{i=1}^{p}J_i)+\varepsilon$$

$$\le m(\bigcup_{i=1}^{p}J_i)+2\varepsilon=\sum_{i=1}^{p}k_i+2\varepsilon.$$

因此$\sum_{i=1}^{p}k_i>m^*(A)-2\varepsilon$. 并且由于(9), 我们有

$$\sum_{i=1}^{p}(f(y_i+k_i)-f(y_i))>r\sum_{i=1}^{p}k_i>r(m^*(A)-2\varepsilon). \tag{10}$$

由于f是单调增加的, 并且每个J_i包含在某个I_j中, 因此我们有

$$\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_i-h_i))\ge\sum_{i=1}^{p}(f(y_i+k_i)-f(y_i)). \tag{11}$$

结合(8),(10)和(11)得到

$$r(m^*(A)-2\varepsilon)<s(m^*(A)+\varepsilon).$$

由于$\varepsilon>0$的任意性得到$rm^*(A)\le sm^*(A)$. 由于$r>s$, 故必有$m^*(A)=0$. 由此得到$m^*(E_1)=0$. 类似地, 若令$E_2=\{D^-f>D_+f\}$, 则可以证明$m^*(E_2)=0$. 令$E=E_1\cup E_2$, 则$m^*(E)=0$. 在$(a,b)-E$上, 我们有

$$D_+f\le D^+f\le D_-f\le D^-f\le D_+f.$$

因此在$(a,b)-E$上(5)成立. 这表明极限

$$g(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

几乎处处存在(有限或$\pm\infty$). 当$g(x)$有限时, f在x点可导. 令

$$g_n(x)=n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)],\ n\ge 1.$$

(其中定义当$x>b$时$f(x)=f(b)$). 则$g_n\to g$ a.e.. 因此g是可测的. 由于f是单调增加的, 故$g_n\ge 0$. 我们有

$$\int_a^b g_n dx = n\int_a^b [f(x+\frac{1}{n})-f(x)]dx = n\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} fdx - n\int_a^b fdx$$

$$= n\int_b^{b+\frac{1}{n}} fdx - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} fdx = f(b) - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} fdx.$$

因此，由 Fatou 引理我们有

$$\int_a^b gdx \le \varliminf_{n\to\infty}\int_a^b g_n dx = \varliminf_{n\to\infty}(f(b)-n\int_a^{a+\frac{1}{n}} fdx) \le f(b)-f(a). \tag{12}$$

这表明 g 是可积的. 因此 g 是几乎处处有限的. 于是 f 几乎处处可导. 由于 $f'=g$ a.e. 故(12)表明(4)成立.■

若 f 是定义在 $[a,b]$ 上的单调减少的实值函数，对 $-f$ 应用定理 5 的结论知道单调减少的实值函数也是几乎处处可微的.

下面的例子说明在定理 5 中，单调函数是几乎处处可导的这一结论，一般说来是不能改进的.

下面是关于单调函数的逐项求导定理.

定理 6 (Fubini)设 f_n $(n=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的一列单调增加的函数，并且函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处收敛于 $f(x)$. 则成立

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \text{ a.e.}. \tag{13}$$

证明 不妨设 $f_n(a)=0, n\ge 1$. 由于 $f, f_n(n\ge 1)$ 都单调增加的，因此至多除去一个零测度集 E 外，f', f_n' $(n\ge 1)$ 都存在. 记 $s_n(x)=\sum_{i=1}^n f_i(x)$. 对每个自然数 $n\ge 1$，由于 $s_n(x)-s_{n-1}(x)=f_n(x)$ 和 $f(x)-s_n(x)$ 都是单调增加的函数，故它们的导数都是非负的. 因此有

$$s_{n-1}'(s)\le s_n'(x)\le f'(x), \ \ x\in E.$$

因此在 E 上级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 处处收敛. 由于 $\lim_{n\to\infty} s_n(b)=f(b)$，故存在 $s_n(b)$ 的子列 $s_{n_k}(b)$ 使得 $f(b)-s_{n_k}(b)<\frac{1}{2^k}$，$k\ge 1$.因此对任意 $x\in[a,b]$，我们有

$$0\le \sum_{k=1}^{\infty}(f(x)-s_{n_k}(x)) \le \sum_{k=1}^{\infty}(f(b)-s_{n_k}(b)) < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1.$$

这表明级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(f(x)-s_{n_k}(x))$ 处处收敛. 注意这个级数的每一项 $f(x)-s_{n_k}(x)$ 也是单调

增加的函数. 将上面证明的关于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$的结论用到级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(f(x)-s_{n_k}(x))$上来, 即知级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(f'(x)-s'_{n_k}(x))$几乎处处收敛. 由于收敛级数的通项应收敛于 0, 因此

$$\lim_{k\to\infty}(f'(x)-s'_{n_k}(x))=0 \ \text{a.e.}.$$

即$\lim\limits_{k\to\infty} s'_{n_k}(x)=f'(x)$ a.e.. 由此知道$\lim\limits_{n\to\infty} s'_n(x)=f'(x)$ a.e.. 即(13)成立.■

小 结 本节的主要结果是单调函数的可微性定理.本节的结果表明,单调函数具有一系列良好的性质.单调函数是 L 可积的并且几乎处处可微. Vitali 覆盖定理不仅是证明单调函数的可微性定理的基础, 它本身也是一个重要的结果.

习 题 习题五, 第 1 题—第 3 题