第 18 讲　自反空间与一致凸空间

教学目的

掌握具有明显几何特征与重要应用的一致凸空间的定义及相关性质.

授课要点

1　自反性的概念和常用空间的自反性.

2　自反空间的各种属性.

我们在前一讲已经定义过自反空间，当 X 自反时，自然嵌入映射 $J: X \to X^{**}$ 是到上的等距映射， X 与 X^{**} 等距同构. James 曾经给出过例子：一个 Banach 空间 X 与其二次共轭空间 X^{**} 等距同构，而自然嵌入映射 J 却不是相应的到上的等距映射，于是这样的空间 X 不是自反空间. 这告诉我们，自反空间定义中到上的映射 J 一定要求是自然嵌入算子.

例 1　Φ^n， l^p， $L^p[a,b](1<p<\infty)$ 都是自反空间.

这里仅验证 $L^p[a,b]$ 的自反性. 由本章第 15 讲定理 2 的证明我们已经知道当 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 时， $L^p[a,b]^{**}=L^q[a,b]^*=L^p[a,b]$，利用那里建立的等距同构映射复合起来可以得到 $L^p[a,b]$ 与 $L^p[a,b]^{**}$ 之间一一的到上的等距同构映射. 记此映射为 $\varphi: L^p[a,b] \to L^p[a,b]^{**}$， $x \to \varphi_x$，我们验证 φ 即是自然嵌入 J． 实际上，对于任何 $f \in L^p[a,b]^*$，若 f 对应于函数 $\xi \in L^q[a,b]$，则由第 15 讲定理 2 的证明，φ_x 作为 $L^p[a,b]^*$ 上的线性泛函对应地有

$$\varphi_x(f)=\int_a^b \varphi_x(t)\xi(t)dt=\int_a^b x(t)\xi(t)dt=f(x),$$

f 是任意的，所以由定义 φ 即是 J.

例 2 c_0，l^1，$L^1[a,b]$ 都不是自反的.

这里仅验证 l^1，我们知道 $\left(l^1\right)^*=l^\infty$，并且空间 l^1 是可分的，l^∞ 不可分，若 l^1 自反，则必有 $\left(l^\infty\right)^*=l^1$，这与本章第 16 讲定理 15 的结论矛盾.

定理 1 若 X 是自反空间，则 X 的任一闭线性子空间 Y 是自反空间.

证明 设 $Y\subset X$ 是闭线性子空间，$J':Y\to Y^{**}$ 是自然嵌入映射. 对于每个 $y^{**}\in Y^{**}$ 和 $\forall x^*\in X^*$，记 $x^*\big|_Y$ 为 x^* 在 Y 上的限制并且令

$$x^{**}\left(x^*\right)=y^{**}\left(x^*\big|_Y\right), \tag{1}$$

则 $x^{**}\in X^{**}$，于是存在 $x\in X$，$J(x)=x^{**}$.

现在证明 $x\in Y$，若不然，Y 是闭子空间，$x\notin Y$，则存在 ${x_0}^*\in X^*, {x_0}^*(x)=1$，${x_0}^*(y)=0$，$(\forall y\in Y)$. 于是

$$1={x_0}^*(y)={x_0}^{**}\left({x_0}^*\right)=y^{**}\left({x_0}^*\big|_Y\right)=0,$$

矛盾，由此改记 $x=y$.

对于 $\forall y^*\in Y^*$，y^* 可以延拓为 X 上的连续线性泛函 x^*，使得 $x^*\big|_Y=y^*$，从而由 (1) 式得到

$$y^*(y)=x^*(x)=x^{**}\left(x^*\right)=y^{**}\left(y^*\right),$$

y^*是任意的，故$J'y^* == y^{**}$，J'到上，Y自反.

利用稍微复杂一点的方法可以证明下面定理，这里将具体的证明略去.

定理 2 设X是 Banach 空间，则

(1) X是自反的当且仅当X^*自反.

(2)若X自反，M是X的闭线性子空间，则商空间$X \setminus M$自反.

定理 3 设X是线性赋范空间，则以下诸条件等价：

(1) X自反.

(2) X中任一有界序列包含有w收敛的子序列.

(3) X的闭单位球S_X是w序列紧集.即S_X 中任一无穷序列有弱收敛于S_X中点的子序列.

(4) $\forall\ f \in X^*$，$f \neq 0$，存在$x \in X$，$\|x\| = 1$使得$f(x) = \|f\|$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 设$\{x_n\}$是X中任一有界序列，例如$\|x_n\| \le M\ (\forall n \ge 1)$，考虑$Y = \overline{span}\{x_n\}$，$Y$是$X$的闭线性子空间. 由定理 1，$Y$自反. 注意到$Y$是可分的，故$Y^*$可分.若$J': Y^* = Y^{**}$是自然嵌入映射，$\{x_n\}$是$Y$中的有界序列，从而$\{J'x_n\}$是$Y^{**}$中的有界序列. 根据本章第 16 讲定理 16，有子序列$\{J'x_{n_k}\}$及$y_0^{**} \in Y^{**}$，$J'x_{n_k} \xrightarrow{w^*} y_0^{**}$. 由于$Y$是自反的，故存在$y_0 \in Y$，$J'y_0 = y_0^{**}$.即$\forall y^* \in Y^*$，

$$\left(J'x_{n_k}\right)\left(y^*\right) \to \left(J'y_0\right)\left(y^*\right).$$

现在，$\forall\ x^* \in X^*$，设$y^* = x^*\big|_Y$，则

$$x^*\left(x_{n_k}\right) = y^*\left(x_{n_k}\right) = \left(J'x_{n_k}\right)\left(y^*\right) \to \left(J'y_0\right)\left(y^*\right) = y^*\left(y_0\right) = x^*\left(y_0\right)$$

故$x_{n_k} \xrightarrow{w} y_0$.

(2) $\Rightarrow$ (3) 由上面证明知道，$\forall x_n \in S_X$，有子序列$\{x_{n_k}\}$，

$x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0 \in X$，同时有 $\|x_0\| \le \varliminf_{k\to\infty} \|x_{n_k}\| \le 1$，故 $x_0 \in S_X$． S_X w序列紧.

(3) $\Rightarrow$ (4) 设 $f \ne 0$， $f \in X^*$． 由 $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$， 取 $x_n \in X$，

$\|x_n\| = 1$，$\|f\| - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \le \|f\|$． 由(3)，$\{x_n\}$ 中有子序列 $x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0$，

$\|x_0\| \le \varliminf_{n_k\to\infty} \|x_{n_k}\| \le 1$，特别地， $f(x_0) = \lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k})$． 但

$$\|f\| - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \le \|f\|,$$

于是

$$|f(x_0)| = \lim_{n_k\to\infty} |f(x_{n_k})| = \|f\|.$$

现在 $|f(x_0)| \le \|f\|\|x_0\|$，故 $\|x_0\| \ge 1$，从而 $\|x_0\| = 1$． 若 $f(x_0) = re^{i\theta}$，

取 $x = e^{-i\theta} x_0$， 则 $\|x\| = \|x_0\| = 1$， 并且

$$f(x) = e^{-i\theta} f(x_0) = r = |f(x_0)| = \|f\|.$$

(4) $\Rightarrow$ (1) 一个初等的但繁复的证明由 James 作出 (见 Israel J.Math. vol 13， 1972)， 这里略去.

例 3 $C[0,1]$不是自反空间. 取 $x_n(t) = t^n$， $n \ge 1$， 则 $x_n \in C[0,1]$. 由第 16 讲例 4，若有子列 x_{n_k} 弱收敛于 x，则 $x(t) = 0$，$0 < t < 1$，$x(1) = 1$. 但 $x \notin C[0,1]$，这说明 $C[0,1]$的闭单位球不是 w 序列紧的. 由定理 3(3) 知 $C[0,1]$不自反.

习题二第 4 题和定理 3(4)也可以说明这个结论成立.

定理 3(3) 说明自反空间中的任一有界闭凸子集是弱序列紧集，这一性质在逼近论和凸分析中有很多应用.

定理 4 设 X 是线性赋范空间，$E \subset X$ 是弱序列紧集，$x_0 \in X \setminus E$，则存在 $y_0 \in E$ 使得

$$\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in E} \|x_0 - y\| = d(x_0, E).$$

即 y_0 是 x_0 关于 E 的最佳逼近元.

证明 取 $y_n \in E$ 使得 $\|x_0 - y_n\| \to \inf_{y \in E} \|x_0 - y\|$，由于 E 是弱序列紧的，从而有子列 $y_{n_k} \to y_0 \in E$. 现在一方面

$$\|x_0 - y_0\| \ge \inf_{y \in E} \|x_0 - y\|.$$

另一方面，由于 $\forall f \in X^*$，$f(y_{n_k}) \to f(y_0)$，特别地取 $f_0 \in X^*$ 使得 $\|f_0\| = 1$，$f_0(x_0 - y_0) = \|x_0 - y_0\|$，则

$$\|x_0 - y_0\| = f_0(x_0 - y_0) = \lim_{n_k \to \infty} f_0(x_0 - y_{n_k})$$

$$\le \lim_{n_k \to \infty} \|f_0\| \|x_0 - y_{n_k}\| = \inf_{y \in E} \|x_0 - y\|.$$

于是

$$\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in E} \|x_0 - y\|.$$

线性赋范空间 X 上的泛函 $\varphi : X \to (-\infty, \infty]$(不必线性)称为是弱下半连续的，若对于任何 $x_0 \in X$ 和 $x_n \xrightarrow{w} x_0$，$\varphi(x_0) \le \underline{\lim}_{n \to \infty} \varphi(x_n)$.

定理 5 设 E 是线性赋范空间 X 中的弱序列紧集，$\varphi : E \to R$ 是弱下半连续泛函，则 φ 在 E 上可达到极小值，即 $\exists x_0 \in E$ 使得

$$\varphi(x_0)=\lim_{x\in E}\varphi(x).$$

证 明 首先证明 φ 在 E 上是有下界的. 若不然，$\forall n\geq 1$，$\exists x_n\in E$，$\varphi(x_n)<-n$，E 弱紧，此时存在 $x_{n_k}\xrightarrow{w}x_0\in E$，由 φ 的下半连续性，$\varphi(x_0)\leq\varliminf_{n_k\to\infty}\varphi(x_{n_k})=-\infty$，这与 φ 的定义矛盾.

其次，取 $x_n'\in E$ 使得 $\varphi(x_n')=\inf_{y\in E}\varphi(x)$，则有子列 x_{n_k}'，$x_{n_k}'\xrightarrow{w}x_0'\in E$. 由下半连续性

$$\varphi(x_0')\leq\varliminf_{n_k\to\infty}\varphi(x_{n_k}')=\inf_{y\in E}\varphi(x).$$

另一方面，显然 $\varphi(x_0')\geq\inf_{y\in E}\varphi(x)$. 故最后有 $\varphi(x_0')=\inf_{y\in E}\varphi(x)$.

推论 1 设 X 是自反空间，$E\subset X$ 是有界闭凸子集，则

(1) $\forall x\in X$ 存在 x 关于 E 的最佳逼近元 y，

$$\|x-y\|=\inf_{z\in E}\|x-z\| .$$

(2) 若 $\varphi:X\to R$ 是弱下半连续的，则 $\exists x_0\in E$ 使得

$$\varphi(x_0)\geq\inf_{x\in E}\varphi(x).$$

末了，让我们介绍一致凸空间.

定义 2 线性赋范空间 X 称为是一致凸的，若 $\forall\varepsilon\ (0<\varepsilon\leq 2)$，存在 $\delta>0$，对于任意 $x,y\in X$，$\|x\|\leq 1$，$\|y\|\leq 1$，只要 $\|x-y\|\geq\varepsilon$，则

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\leq 1-\delta. \tag{2}$$

例 4 Hilbert 空间是一致凸的.

实际上，由平行四边形公式，$\forall x, y \in X$

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right),$$

若$\|x\| \le 1$，$\|y\| \le 1$，$\|x-y\| \ge \varepsilon$，则$\|x+y\|^2 \le 4-\varepsilon^2$，于是

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \le \sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}}=1-\delta,$$

其中$\delta=1-\sqrt{1-\dfrac{\varepsilon^2}{4}}$.

此外空间l^p，$L^p[a,b]$ $(1<p<\infty)$也是一致凸空间.

由定义容易知道，每个一致凸空间是严格凸的.

例 4 由于l^1，$L^1[a,b]$，$C[a,b]$，$L^\infty[a,b]$，c，c_0不是严格凸的，所以也不是一致凸的.

定理 6 Banach 空间X是一致凸的当且仅当$\forall x_n, y_n \in X$，$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n\|=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$.

证 明 首先设$\|x_n\|=\|y_n\|=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$，若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|x_n-y_n\| \ge \varepsilon>0$，则有无穷多个$x_{n_k}, y_{n_k}$ 使得$\|x_{n_k}-y_{n_k}\| \ge \dfrac{\varepsilon}{2}>0$.由一致凸性定义，$\left\|\dfrac{x_{n_k}+y_{n_k}}{2}\right\| \le 1-\delta$，这里$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，从而$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|x_n+y_n\|<2$，矛盾.

现设$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n\|=1$，取$x_n'=\dfrac{x_n}{\|x_n\|}$，$y_n'=\dfrac{y_n}{\|y_n\|}$，则$\|x_n'\|=\|y_n'\|=1$

并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n'-y_n'\|=2$，由上面证明知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n'-y_n'\|=0$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=\lim_{n\to\infty}\big\|x_n'\|x_n\|-y_n'\|y_n\|\big\|=0.$$

反之，若 X 不是一致凸的，则存在 $\varepsilon_0>0$ 和 x_n,y_n 使得 $\|x_n\|\le 1$，$\|y_n\|\le 1$，$\|x_n-y_n\|\ge\varepsilon_0$，但 $\left\|\dfrac{x_n+y_n}{2}\right\|\ge 1-\dfrac{1}{n}$，这与定理中所说条件矛盾.

推论 2 设 X 是一致凸空间，$x_n\in X$，若 $\|x_n\|\to 1$ 并且 $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|x_m+x_n\|=2$，则 $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|x_m-x_n\|=0$.

定理 7 一致凸 Banach 空间是自反的.

证 明 对于每个 $x_0^{**}\in X^{**}$，不失一般性设 $\|x_0^{**}\|=1$，我们证明存在 $x_0\in X$ 使得 $Jx_0=x_0^{**}$，其中 J 是自然嵌入映射。

实际上，$\forall n\ge 1$，存在 $x_n^*\in X^*$，$\|x_n^*\|=1$ 使得

$$x_0^{**}\left(x_n^*\right)>\|x_0^{**}\|-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}. \tag{3}$$

由 Helly 第二选择定理，对于 $x_1^*,\cdots\cdots,x_n^*$ 和 $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$，存在 $x_n\in X$ 使得

$$x_0^{**}\left(x_i^*\right)=x_i^*\left(x_n\right) \tag{4}$$

并且

$$\|x_n\|\le\|x_0^{**}\|+\frac{1}{n}=1+\frac{1}{n}.$$

于是

$$1-\frac{1}{n} < x_0^{**}\left(x_i^*\right)=x_i^*\left(x_n\right)\le\left\|x_i^*\right\|\left\|x_n\right\| < 1+\frac{1}{n},$$

由此得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|x_n\right\|=1$. 再由

$$2\left(1-\frac{1}{n}\right) < 2x_0^{**}\left(x_i^*\right)=x_i^*\left(x_n\right)+x_i^*\left(x_m\right)$$

$$\le\left\|x_i^*\right\|\left\|x_n+x_m\right\|=\left\|x_n+x_m\right\|\le 2\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

得出 $\lim\limits_{n,m\to\infty}\left\|x_m+x_n\right\|=2$. 上面推论 2 说明 $\lim\limits_{n,m\to\infty}\left\|x_m-x_n\right\|=0$. 换句话说，$\left\{x_n\right\}$ 是 Cauchy 序列. X 完备，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0\in X$，显然 $\left\|x_0\right\|=1$.

对于(4)，固定 i，令 $n\to\infty$，则得到 $x_0^{**}\left(x_i^*\right)=x_i^*\left(x_0\right)$，$i\ge 1$.

x_0 是惟一的.实际上若另有 $x_0'\in X$，$\left\|x_0'\right\|=1$，$x_0'\ne x_0$ 并且 $x_0^{**}\left(x_i^*\right)=x_i^*\left(x_0'\right)$，$\forall i\ge 1$根据一致凸性必有$\left\|x_0+x_0'\right\| < 2$，但由

$$2\left(1-\frac{1}{n}\right)\le 2x_0^{**}\left(x_i^*\right)=x_i^*\left(x_0+x_0'\right)\le\left\|x_0+x_0'\right\|,$$

得出$\left\|x_0+x_0'\right\|\ge 2$，矛盾.

若 $x^*\in X^*$ 是任一元，考虑序列 $x^*,x_1^*,x_2^*,\cdots$，重复上面过程可得到 $\overline{x_0}$，$\left\|\overline{x_0}\right\|=1$并且

$$x_0^{**}\left(x^*\right)=x^*\left(\overline{x_0}\right),\quad x_0^{**}\left(x_i^*\right)=x_i^*\left(\overline{x_0}\right),\quad i\ge 1$$

由惟一性知道 $\overline{x_0}=x_0$ 并且 $x_0^{**}\left(x^*\right)=x^*\left(x_0\right)$， x^* 的任意性说明 $Jx_0=x_0^{**}$， J 到上，故 X 自反.

推论 3 设 X 是一致凸 Banach 空间， $E\subset X$ 是非空闭凸集，则存在惟一的 $x_0\in E$ 使得 $\|x_0\|=\inf\limits_{x\in E}\|x\|$.

证 明 若 $0\notin E$，由于 X 是自反空间，由推论 1(其中取 $x=0$)即得出所要的结论，当 $0\in E$ 时，取 $x_0=0$ 即可.

推论 4 设 X 是一致凸 Banach 空间， $x_n\in X$，则 $x_n\to x$ 当且仅当 $x_n\xrightarrow{w}x$ 并且 $\|x_n\|\to\|x\|$.

证 明 必要性是明显的. 现证充分性. 设 $x_n\xrightarrow{w}x$， $\|x_n\|\to\|x\|$. 若 $x=0$，即 $\|x_n\|\to 0$，故结论成立. 若 $x\neq 0$，不失一般性，设 $\|x\|=1$，取 $f\in X^*$， $\|f\|=1$， $f\left(x\right)=\|x\|$，则

$$f\left(x_m+x_n\right)\to 2f\left(x\right)=2,$$

从而

$$2\le\lim_{m,n\to\infty}f\left(x_m+x_n\right)\le\lim_{m,n\to\infty}\|x_m+x_n\|\le\lim_{m,n\to\infty}\left(\|x_m\|+\|x_n\|\right)=2.$$

由推论 2， $\|x_m-x_n\|\to 0$. 由此得出 $x_n\to x$.

思考题

试证明 l^p 和 $L^p[a,b]\,(0<p<\infty)$ 都是一致凸空间. (在 $2\le p<\infty$ 时证明并应用不等式 $\|x+y\|^p+\|x-y\|^p\le 2^{p-1}(\|x\|^p+\|y\|^p),\forall x,y.$ 在 $1<p\le 2$ 情况利用这一结果以及共轭范数的公式.)