§3.2 可测函数的收敛性

教学目的　可测函数列可以定义各种收敛性. 本节讨论几乎处处收敛, 依测度收敛和几乎一致收敛. 几种收敛性之间存在一些蕴涵关系. 通过本节的学习, 可以使学生对可测函数列的几种收敛性和相互关系有一个较全面的了解.

本节要点　本节引进的几种收敛是伴随测度的建立而产生的新的收敛性. 特别是依测度收敛是一种全新的收敛, 与熟知的处处收敛有很大的差异. Egorov 定理和 Riesz 定理等揭示了这几种收敛之间的关系. Riesz 定理在几乎处处收敛和较难处理的依测度收敛之间架起了一座桥梁.

以下所有的讨论都是在某一固定的测度空间 $(X,\mathcal{F},\mu)$ 上进行的.

几乎处处成立的性质　设 $P(x)$ 是一个与 x 有关的命题. 若存在一个零测度集 N, 使得当 $x\in X-N$ 时 $P(x)$ 成立(换言之, $\{x:P(x)$ 不成立$\}\subset N$), 则称 $P(x)$ (关于测度 μ) 几乎处处成立. 记为 $P(x)$ $\mu-$a.e., 或者 $P(x)$ a.e.

在上面的定义中, 若 $P(x)$ 几乎处处成立, 则集 $\{x:P(x)$不成立$\}$ 包含在一个零测度集内. 若 $\{x:P(x)$不成立$\}$ 是可测集, 则由测度的单调性知道 $\mu(\{x:P(x)$不成立$\})=0$.

显然, 若 $(X,\ \mathcal{F},\ \mu)$ 是完备的测度空间, 则 $P(x)$ 几乎处处成立当且仅当 $\mu(\{x:P(x)$不成立$\})=0$.

例 1　设给定两个函数 f 和 g. 若存在一个零测度集 N, 使得当 $x\notin N$ 时 $f(x)=g(x)$, 则称 f 和 g 几乎处处相等, 记为 $f=g$ a.e.

例 2　设 f 为一广义实值函数. 若存在一个零测度集 N, 使得当 $x\notin N$ 时 $|f|<+\infty$, 则称 f 是几乎处处有限的, 记为 $|f|<+\infty$, a.e.

可测函数的几种收敛性　设 E 是 X 的子集. $f,\ f_n$ $(n\ge 1)$ 定义在 E 上的函数. 若对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得当 $n\ge N$ 时, 对一切 $x\in E$ 成立 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, 则称 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f, 记为 $f_n\to f$ un..

定义 1　设为 $\{f_n\}$ 一可测函数列, f 为一可测函数.

(1) 若存在一个零测度集 N, 使得当 $x\notin N$ 时, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, 则称 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛于 f, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ a.e., 或 $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$.

(2) 若对任给的$\varepsilon>0$，总有

$$\lim_{n\to+\infty}\mu\{|f_n-f|\ge\varepsilon\}=0.$$

则称$\{f_n\}$依测度收敛于f，记为$f_n\xrightarrow{\mu}f$.

(3) 若对任给的$\delta>0$，存在可测集E_δ，$\mu(E_\delta)<\delta$，使得$\{f_n\}$在$X-E_\delta$上一致收敛于f，则称$\{f_n\}$几乎一致收敛于f，记为$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ a.un. 或 $f_n\xrightarrow{\text{a..un.}}f$.

容易证明，若将两个a.e.相等的函数不加区别，则上述几种极限的极限是唯一的．例如，若$f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$，$f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}g$，则$f=g$ a.e.．其证明留作习题．

例 3 设$([0,+\infty),\mathcal{M}([0,+\infty)),m)$为区间$[0,+\infty)$上的 Lebesgue 测度空间．其中$\mathcal{M}([0,+\infty))$是$[0,+\infty)$上的 L 可测集所成的$\sigma$-代数，$m$是$\boldsymbol{R}^1$上的 L 测度在$[0,+\infty)$上的限制．令

$$f_n(x)=1-I_{(\frac{1}{n},\,n)}(x),\quad n\ge1.$$

则对任意$x>0$，$f_n(x)\to0(n\to\infty)$．当$x=0$时$f_n(x)$不收敛于 0．但$m(\{0\})=0$，因此在$[0,+\infty)$上$f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}0$．由于对$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，

$$m(\{|f_n|\ge\frac{1}{2}\})=m([0,\frac{1}{n}]\cup[n,+\infty))=+\infty\not\longrightarrow0,\ (n\to+\infty).$$

因此$\{f_n\}$不依测度收敛于0．这个例子表明在一般情况下，几乎处处收敛不一定能推出依测度收敛．

例 4 设$([0,1],\mathcal{M}([0,1]),m)$是$[0,1]$上的 Lebesgue 测度空间．令

$$f_n(x)=x^n,\quad n\ge1.$$

则对任意$\delta>0$，$\{f_n\}$在$[0,1-\delta]$上一致收敛于0．由于$m((1-\delta,1])=\delta$可以任意小，因此$f_n\xrightarrow{\text{a..un.}}0$．又显然$f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}0$.

例 5 设$([0,1],\mathcal{M}([0,1]),m)$是$[0,1]$上的 Lebesgue 测度空间．令

$$A_n^i=[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}],\quad i=1,\cdots,n,\ n\ge1.$$

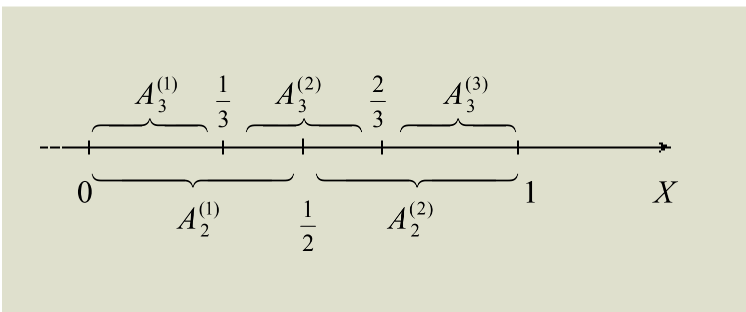

图 2—1

(图 2—1)将$\{A_n^i\}$先按照n后按照i的顺序重新编号记为$\{E_n\}$. 显然$m(E_n)\to 0$. 令

$$f_n(x)=I_{E_n}(x),\ n\ge 1,\qquad f(x)=0.$$

对任意$\varepsilon>0$, 由于

$$m(\{|f_n-f|\ge\varepsilon\})=m(E_n)\to 0,\ n\to\infty.$$

故$\{f_n\}$依测度收敛于f. 但$\{f_n\}$在$[0,1]$上处处不收敛. 事实上, 对任意$x_0\in[0,1]$, 必有无穷多个E_n包含x_0, 也有无穷多个E_n不包含x_0. 故有无穷多个n使得$f_n(x_0)=1$, 又有无穷多个n使得$f_n(x_0)=0$. 因此$\{f_n\}$在x_0不收敛. 这个例子表明依测度收敛不能推出几乎处处收敛. 例 3 和例 4 表明, 依测度收敛和几乎处处收敛所包含的信息可能相差很大.

几种收敛性之间的关系 为叙述简单计, 以下我们设所讨论的函数都是实值可测函数. 但以下结果对几乎处处有限的可测函数也是成立的由(见注 1 的说明).

引理 2 设$\mu(X)<+\infty$. 若$f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$. 则对任意$\varepsilon>0$有

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\bigcup_{i=n}^{\infty}\{|f_i-f|\ge\varepsilon\})=0.$$

证明 设$\varepsilon>0$是一给定的正数. 任取$x\in X$, 若对任意$n\ge 1$, 存在$i\ge n$, 使得$|f_i(x)-f(x)|\ge\varepsilon$. 则$f_n(x)$不收敛于$f(x)$. 这表明

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}\{|f_i-f|\ge\varepsilon\}\subset\{x: f_n(x)\not\longrightarrow f(x)\}.$$

由于$f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$, 因此由上式知道

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}\{|f_i-f|\ge\varepsilon\}\right)=0.$$

由于$\mu(X)<+\infty$, 由测度的上连续性, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}\{|f_i-f|\ge\varepsilon\}\right)=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}\{|f_i-f|\ge\varepsilon\}\right)=0.\qquad\blacksquare$$

容易证明, 若$f_n\xrightarrow{\text{a..un.}}f$, 则$f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$ (其证明留作习题). 下面的定理表明当$\mu(X)<+\infty$时, 其逆也成立.

定理 3 (叶戈洛夫)若$\mu(X)<+\infty$, 则$f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$蕴涵$f_n\xrightarrow{\text{a..un.}}f$.

证明 设$\mu(X)<+\infty$, $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$. 由引理 2, 对任意$\varepsilon>0$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}\{|f_i-f|\ge\varepsilon\}\right)=0.$$

于是对任意的$\delta>0$和自然数$k\ge 1$, 存在自然数n_k使得

$$\mu\left(\bigcup_{i=n_k}^{\infty}\{|f_i - f| \ge \frac{1}{k}\}\right) < \frac{\delta}{2^k}.$$

令 $E_\delta = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=n_k}^{\infty}\{|f_i - f| \ge \frac{1}{k}\}$. 由测度的次可数可加性我们有

$$\mu(E_\delta) \le \sum_{k=1}^{\infty}\mu\left(\bigcup_{i=n_k}^{\infty}\{|f_i - f| \ge \frac{1}{k}\}\right) \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^k} = \delta.$$

往证在 E_δ^C 上，$\{f_n\}$ 一致收敛于 f . 事实上，由 De Morgan 公式得

$$E_\delta^C = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=n_k}^{\infty}\{|f_i - f| < \frac{1}{k}\} \subset \bigcap_{i=n_k}^{\infty}\{|f_i - f| < \frac{1}{k}\}, \quad k \ge 1. \tag{1}$$

对任意 $\varepsilon > 0$ 取 k 足够大使得 $\frac{1}{k} < \varepsilon$. 则由(1)式知道，当 $i \ge n_k$ 时对一切 $x \in E_\delta^C$，有 $|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{k} < \varepsilon$. 即在 E_δ^C 上 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f .这就证明了 $f_n \xrightarrow{\text{a..un.}} f$ ■

注 2 在叶戈洛夫定理中，条件 $\mu(X) < +\infty$ 不能去掉. 例如，若令 $f_n(x) = I_{[n,+\infty)}(x)$, $n \ge 1$. 则 $\{f_n\}$ 在 $\boldsymbol{R}^1$ 上处处收敛于 0. 但容易知道 $\{f_n\}$ 不是几乎一致收敛于 0.

定理 4 若 $\mu(X) < +\infty$，则 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 蕴涵 $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

证明 设 $\mu(X) < +\infty$，$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$.. 由引理 2，对任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}\{|f_i - f| \ge \varepsilon\}\right) = 0.$$

由测度的单调性立即得到

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\{|f_n - f| \ge \varepsilon\}) \le \lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}\{|f_i - f| \ge \varepsilon\}\right) = 0.$$

即 $f_n \xrightarrow{\mu} f$. ■

本节例 3 表明，在定理 4 中，条件 $\mu(X) < +\infty$ 不能去掉.

定理 5 (Riesz)若 $f_n \xrightarrow{\mu} f$，则存在 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$，使得 $f_{n_k} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$.

证明 设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$. 对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$，存在 $N \ge 1$，使得当 $n \ge N$ 时，有

$$\mu(\{|f_n - f| \ge \varepsilon\}) < \delta.$$

于是对任意自然数 $k \ge 1$，存在自然数 n_k，使得

$$\mu(\{|f_{n_k}-f|\geq \frac{1}{k}\})<\frac{1}{2^k}. \tag{2}$$

我们可适当选取 n_k 使得 $n_k < n_{k+1}, k=1,2,\cdots$. 往证 $f_{n_k} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$. 令

$$E_i=\bigcap_{k=i}^{\infty}\{|f_{n_k}-f|<\frac{1}{k}\},\ i=1,2,\cdots.$$

对任意 $x\in E_i$，当 $k\geq i$ 时,

$$|f_{n_k}(x)-f(x)|<\frac{1}{k}.$$

这表明 $\{f_{n_k}\}$ 在 E_i 上收敛于 f. 令 $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$. 则 $\{f_{n_k}\}$ 在 E 上收敛于 f. 往证 $\mu(E^C)=0$. 由 De Morgan 公式, 我们有

$$E^c=\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i^c=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}\{|f_{n_k}-f|\geq\frac{1}{k}\}.$$

利用(2)容易得到 $\mu(E_1^C)\leq 1$. 因此由测度的上连续性并且利用(2), 我们有

$$\begin{aligned}\mu(E^c)&=\lim_{i\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k=i}^{\infty}\{|f_{n_k}-f|\geq\frac{1}{k}\}\right)\\&\leq\lim_{i\to\infty}\sum_{k=i}^{\infty}\mu(\{|f_{n_k}-f|\geq\frac{1}{k}\})\\&\leq\lim_{i\to\infty}\sum_{k=i}^{\infty}\frac{1}{2^k}=0.\end{aligned}$$

这就证明了 $f_{n_k}\xrightarrow{\text{a.e.}}f$. ■

几种收敛性之间的关系如图 2—2

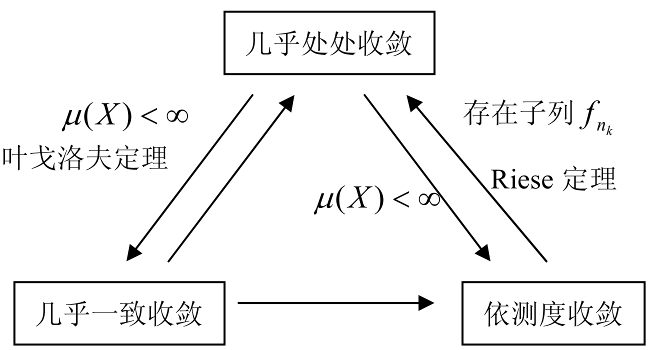

图 2—2

定理 5 给出了依测度收敛和几乎处处收敛的联系. 利用这种联系, 常常可以把依测度

收敛的问题转化为几乎处处的问题. 而几乎处处收敛是比较容易处理的.

思考题 设 $\mu(X) < +\infty$. 证明: $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 当且仅当 $\{f_n\}$ 的任一子列 $\{f_{n_k}\}$ 都存在其子列 $\{f_{n_{k'}}\}$, 使得 $f_{n_{k'}} \xrightarrow{\text{a.e.}} f \ (k' \to \infty)$.

小 结 本节介绍了几乎处处收敛, 依测度收敛和几乎一致收敛, 它们是伴随测度的建立而产生的新的收敛性.几种收敛性之间有一些蕴涵关系. 其中最重要的是 Egorov 定理和 Riesz 定理.利用 Riesz 定理,可以把较难处理的依测度收敛的问题化为几乎处处收敛的问题.本节还介绍了几乎处处成立的性质的概念, 后面讨论积分的性质时,将会更清楚地看到这个概念的意义.

习 题 习题三, 第 18 题—第 28 题.