§2.2　外测度与测度的延拓

> **教学目的**　本节讨论如何将环 $\mathcal{R}$ 上的测度延拓到 $\mathcal{R}$ 生成的 σ-代数上去. 这是定义测度常用的方法. 下一节将用这个方法定义重要的 Lebesgue 测度.
>
> **本节要点**　本节所述测度的延拓过程思路较复杂, 论证较繁难. 应注意讲清主要思路, 定理的证明应注意交代主要思想.

一般说来, 要在一个比较复杂的集类上定义一个满足某些特定条件的测度, 往往并非易事. 设 $\mathcal{R}$ 是一个环, $\sigma(\mathcal{R})$ 是由 $\mathcal{R}$ 生成的 σ-代数. 一般情况下, $\sigma(\mathcal{R})$ 要比 $\mathcal{R}$ 大得多. 显然, 在 $\mathcal{R}$ 上定义一个测度要比直接在 $\sigma(\mathcal{R})$ 定义容易. 因此, 如果我们要在 $\sigma(\mathcal{R})$ 定义一个满足某些特定条件的测度, 我们可以先在 $\mathcal{R}$ 上定义这个测度, 然后再设法延拓到 $\sigma(\mathcal{R})$ 上去. 本节将证明, 若 μ 是定义在环 $\mathcal{R}$ 上的测度, 则 μ 总可以延拓到一个包含 $\sigma(\mathcal{R})$ 的 σ-代数上去. 利用测度的延拓定理, 许多重要的测度可以用这种方法构造出来.

本节仍设 X 是一固定的非空集, $\mathcal{P}(X)$ 是 X 的全体子集所成的集类.

外测度　设 $\mathcal{C}$ 是一个非空集类, $A \subset X$. 若 $\{A_n\}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的有限或无穷序列, 使得 $A \subset \bigcup_{n=1}^{k} A_n$ (或 $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$), 则称 $\{A_n\}$ 是 A 的一个 $\mathcal{C}$ 覆盖. 由于有限并总可以写成可数并 (只要令 $A_n = A_k\,(n > k)$, 则 $\bigcup_{n=1}^{k} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$). 因此不妨只考虑由可数个集构成的覆盖.

设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上的测度. 对每个 $A \subset X$, 令

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : \{A_n\}\text{是}A\text{的}\mathcal{R}\text{覆盖}\}.$$

若 A 无 $\mathcal{R}$ 覆盖, 则令 $\mu^*(A) = +\infty$. 这样定义的 μ^* 是定义在 $\mathcal{P}(X)$ 上的非负值集函数. 称 μ^* 为由 μ 导出的外测度.

定理 1 设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上的测度. μ^* 为由 μ 导出的外测度. 则 μ^* 满足:

(i). $\mu^*(\varnothing) = 0$.

(ii). 单调性: 若 $A \subset B$, 则 $\mu*(A) \le \mu^*(B)$.

(iii). 次可数可加性: 对 X 中的任意一列集 $\{A_n\}$ 成立

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \tag{1}$$

证明 由于 $\{\varnothing\}$ 是空集 $\varnothing$ 的一个 $\mathcal{R}$ 覆盖, 故 $\mu^*(\varnothing) \le \mu(\varnothing) = 0$. 因此 $\mu^*(\varnothing) = 0$. 设 $A \subset B$, 则 B 的每个 $\mathcal{R}$ 覆盖也是 A 的 $\mathcal{R}$ 覆盖. 这蕴涵 $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$. 下面证明 μ^* 具有次可数可加性. 设 $\{A_n\}$ 是 X 的一列子集. 不妨设 $\mu^*(A_n) < +\infty$, $n \ge 1$(否则(1)显然成立). 现在任意给定 $\varepsilon > 0$. 由 μ^* 的定义, 对每个 $n \ge 1$, 存在 A_n 的一个 $\mathcal{R}$ 覆盖 $\{C_{n,k}\}_{k\ge1}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_{n,k}) \le \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{2}$$

由于 $\{C_{n,k}, n,k \ge 1\}$ 是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 的一个 $\mathcal{R}$ 覆盖, 由(2)得到

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_{n,k}) \le \sum_{n=1}^{\infty}(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 因此得到 $\mu^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$. 即 μ^* 具有次可数可加性.■

可测集 由 μ 导出的外测度 μ^* 定义在 X 的全体子集所成的集类上. 但 μ^* 的定义域太大, 一般不满足可数可加性. 因而一般不是测度. 下面将证明, 可以通过适当的限制条件挑选出一部分集即所谓"可测集", 这些集构成一个 $\sigma-$代数. 将 μ^* 限制在这个 $\sigma-$代数上, μ^* 满足可数可加性, 因而成为一个测度. 而且这个 $\sigma-$代数一般要比 μ 的定义域 $\mathcal{R}$ 要大, 于是就扩大了原来测度的定义域.

定义 2 设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上的测度, μ^* 是由 μ 导出的外测度. 又设 $E \subset X$. 若对任意 $A \subset X$, 均有

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c). \tag{3}$$

(图 2—1)则称 E 是 μ^*-可测集. μ^*-可测集的全体所成的集类记为 $\mathcal{R}^*$.

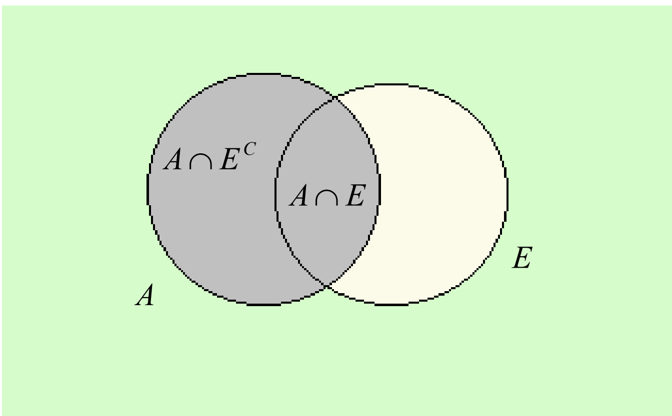

图 2—1

等式(3)称为 Caratheodory 条件(简称为卡氏条件). 由于外测度 μ^* 具有次可数可加性, 因此对任意 $A\subset X$ 成立

$$\mu^*(A)=\mu^*((A\cap E)\cup(A\cap E^c))\le\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c).$$

所以(3)式等价于

$$\mu^*(A)\ge\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c).\tag{4}$$

因此集 E 是 μ^*-可测的当且仅当对任意 $A\subset X$, (4)式成立. 又由于当 $\mu^*(A)=+\infty$ 时(4)总是成立的, 因此若对任意 $A\subset X$, 当 $\mu^*(A)<+\infty$ 时(4)式成立, 则 E 是 μ^*-可测的.

显然, 空集 $\varnothing$ 和全空间 X 是 μ^*-可测集. 又由 μ^* 的单调性和(4)可以看出若 $\mu^*(E)=0$, 则 E 是 μ^*-可测集.

思考题 证明:集 E 是 μ^*-可测集当且仅当对任意 $A\subset E$ 和 $B\subset E^C$ 成立

$$\mu^*(A\cup B)=\mu^*(A)+\mu^*(B).$$

引理 3 设 $E_1,\cdots,E_n$ 是互不相交的 μ^*-可测集. 则对任意 $A\subset X$, 成立

$$\mu^*(A\cap(\bigcup_{i=1}^n E_i))=\sum_{i=1}^n\mu^*(A\cap E_i).\tag{5}$$

证明 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时(5)显然成立. 假定(5)对 $n=k$ 时成立. 因为 $E_1,\cdots,E_n$ 是互不相交的. 所以

$$A\cap(\bigcup_{i=1}^{k+1}E_i)\cap E_{k+1}=A\cap E_{k+1},$$

$$A\cap(\bigcup_{i=1}^{k+1}E_i)\cap E_{k+1}^c=A\cap(\bigcup_{i=1}^{k}E_i).$$

于是由 E_{k+1} 的 μ^*-可测性和归纳法假设, 我们有

$$\begin{aligned}\mu^*\left(A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{k+1}E_i\right)\right)&=\mu^*\left(A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{k+1}E_i\right)\cap E_{k+1}\right)+\mu^*\left(A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{k+1}E_i\right)\cap E_{k+1}^c\right)\\&=\mu^*(A\cap E_{k+1})+\mu^*\left(A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{k}E_i\right)\right).\\&=\sum_{i=1}^{k+1}\mu^*(A\cap E_i).\end{aligned}$$

因此当 $n=k+1$ 时(5)式成立. 因此(5)对任意 n 成立.■

定理 4 设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上的测度, μ^* 是由 μ 导出的外测度. $\mathcal{R}^*$ 是 μ^*-可测集的全体所成的集类. 则有

(i). $\mathcal{R}^*$ 是 σ-代数.

(ii). μ^* 限制在是 $\mathcal{R}^*$ 上是一个测度.

证明 (i). 先证明$\mathcal{R}^*$是一个代数. 由于空集$\varnothing$和全空间 X 是μ^*-可测集. 故$\mathcal{R}^*$非空. 由μ^*-可测集的定义立即可以看出若E是μ^*-可测的, 则E^c也是μ^*-可测的, 因此$\mathcal{R}^*$对余运算封闭. 往证$\mathcal{R}^*$对有限并的封闭性. 设$E_1, E_2 \in \mathcal{R}^*$. 令$E = E_1 \cup E_2$. 注意到$E = E_1 \cup (E_1^c \cap E_2)$, 利用$E_1$和$E_2$的可测性, 对任意$A \subset X$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \\
&\le [\mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2)] + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \\
&= \mu^*(A \cap E_1) + [\mu^*((A \cap E_1^c) \cap E_2) + \mu^*((A \cap E_1^c) \cap E_2^c)] \\
&= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) = \mu^*(A)
\end{aligned}$$

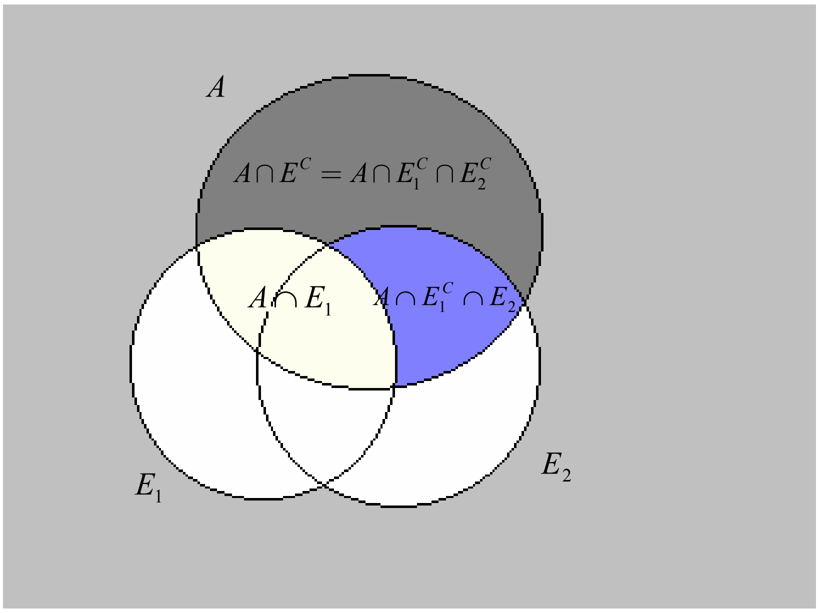

图 2—2

(参见图 2—2)即 E 满足卡氏条件(4)式. 这表明$E = E_1 \cup E_2 \in \mathcal{R}^*$. 因此$\mathcal{R}^*$是一个代数. 为证$\mathcal{R}^*$是一个$\sigma$-代数, 只需再证明$\mathcal{R}^*$对不相交可数并运算封闭即可(参见第一章习题第 20 题). 设$\{E_n\} \subset \mathcal{R}^*$, 并且$E_i \cap E_j = \varnothing (i \ne j)$. 令$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. 由于$\mathcal{R}^*$是代数, 故$\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{R}^*$, $n \ge 1$. 利用引理 2.2.3, 对任意$A \subset X$, 我们有

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \mu^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) + \mu^*\left(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)^c\right) \\
&\ge \mu^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) + \mu^*(A \cap E^c) \qquad (6) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^c).
\end{aligned}$$

(6)式对任意 n 都成立. 在(6)中令 $n\to\infty$, 并利用外测度的次可数可加性, 得到

$$\mu^*(A)\ge\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A\cap E_i)+\mu^*(A\cap E^c)\ge\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c).$$

上式表明 E 满足卡氏条件(4)式 因此 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathcal{R}^*$. 这就证明了 $\mathcal{R}^*$ 是 σ-代数.

(ii). 为证 μ^* 是 $\mathcal{R}^*$ 上的测度, 只需证明 μ^* 在 $\mathcal{R}^*$ 上是可数可加的. 设 $\{E_n\}\subset\mathcal{R}^*$, 并且 $E_i\cap E_j=\varnothing(i\ne j)$. 由外测度的次可数可加性, 我们有 $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)$. 另一方面, 在(5)中令 $A=X$ 得到

$$\sum_{i=1}^{n}\mu^*(E_i)=\mu^*(\bigcup_{i=1}^{n}E_i)\le\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i).$$

上式中令 $n\to\infty$, 得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)\le\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i).$$

因此
$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i),$$

即 μ^* 在 $\mathcal{R}^*$ 上是可数可加的. 所以 μ^* 是 $\mathcal{R}^*$ 上的测度.■

注 1 从定理.4 的证明可以看出, 定理 4 的结论 (i) 和 (ii) 并不依赖于环 $\mathcal{R}$ 上的测度 μ, 只用到了定理 1 中 μ^* 所满足的性质. 因此, 我们可以定义任何满足定理 1 中的 (i), (ii) 和 (iii) 的集函数 μ^* 为外测度. 然后和定义 2 一样定义 μ^* 可测集. 则定理 4 的结论对这样定义的一般的外测度 μ^* 仍成立.

测度的延拓 由定理 4 知道 $\mathcal{R}^*$ 是一个 σ-代数, μ^* 限制在 $\mathcal{R}^*$ 上是一个测度. 一个自然的问题是, 在 $\mathcal{R}$ 上 μ^* 是否等于 μ? $\mathcal{R}^*$ 有多大? 下面的定理回答了这两个问题.

定理 5 设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上的测度, μ^* 是由 μ 导出的外测度. $\mathcal{R}^*$ 是 μ^*-可测集 的全体所成的集类. 则

(i). μ^* 在 $\mathcal{R}$ 上的限制等于 μ, 即当 $A\in\mathcal{R}$ 时 $\mu^*(A)=\mu(A)$.

(ii). $\sigma(\mathcal{R})\subset\mathcal{R}^*$.

证明 (i) 设 $A\in\mathcal{R}$, 由于 $\{A\}$ 是 A 的一个 $\mathcal{R}$ 覆盖, 故 $\mu^*(A)\le\mu(A)$. 另一方面, 对 A 的任意一个 $\mathcal{R}$ 覆盖 $\{A_n\}$, 由于 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap A_n)$, 我们有

$$\mu(A)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap A_n)\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A\cap A_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

对 A 的所有 $\mathcal{R}$ 覆盖取下确界即得 $\mu(A)\le\mu^*(A)$. 因此 $\mu^*(A)=\mu(A)$.

(ii). 先证明 $\mathcal{R}\subset\mathcal{R}^*$. 设 $E\in\mathcal{R}$. 又设 $A\subset X$, 并且 $\mu^*(A)<+\infty$. 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 A 的一个 $\mathcal{R}$ 覆盖 $\{A_n\}$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\mu^*(A)+\varepsilon.$$

于是我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n\cap E)+\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n\cap E^c)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\mu^*(A)+\varepsilon. \tag{7}$$

由于 $\{A_n\cap E\}$ 和 $\{A_n\cap E^c\}$ 分别是 $A\cap E$ 和 $A\cap E^c$ 的 $\mathcal{R}$ 覆盖, 故有

$$\mu^*(A\cap E)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n\cap E),$$

$$\mu^*(A\cap E^c)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n\cap E^c).$$

将以上两式代入(7)得

$$\mu^*(A\cap E)+\mu(A\cap E^c)<\mu^*(A)+\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性得到

$$\mu^*(A\cap E)+\mu(A\cap E^c)\le\mu^*(A).$$

即 E 满足卡氏条件(4), 故 E 是 μ^* 可测集. 这表明 $\mathcal{R}\subset\mathcal{R}^*$. 由定理 4, $\mathcal{R}^*$ 是一个 σ-代数. 因此 $\sigma(\mathcal{R})\subset\mathcal{R}^*$.■

设 $\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_2$ 是两个环并且 $\mathcal{R}_1\subset\mathcal{R}_2$, μ_1 和 μ_2 分别是 $\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_2$ 上的测度. 如果对任意 $A\in\mathcal{R}_1$, 成立 $\mu_1(A)=\mu_2(A)$, 则称 μ_2 是 μ_1 在 $\mathcal{R}_2$ 上的延拓.

设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上的测度, μ^* 是由 μ 导出的外测度. 由定理 4, μ^* 限制在 $\mathcal{R}^*$ 上是一个测度. 又由定理 5, $\sigma(\mathcal{R})\subset\mathcal{R}^*$ 并且在 $\mathcal{R}$ 上 $\mu^*=\mu$. 因此 $\mathcal{R}^*$ 上的测度 μ^* 是 μ 的延拓. 延拓后的测度仍记为 μ. 这表明定义在 $\mathcal{R}$ 上的测度总可以延拓为一个包含 $\sigma(\mathcal{R})$ 的 σ-代数上去. 一般情况下, 延拓测度可能不是唯一的. 但我们有如下结果.

定理 6 (延拓测度的唯一性)设 $\mathcal{R}$ 是一个环, 并且全空间 X 可表为 $\mathcal{R}$ 中一列互不相交的集的并, μ_1 和 μ_2 是 $\sigma(\mathcal{R})$ 上的两个测度并且在 $\mathcal{R}$ 上是 σ 有限的. 若在 $\mathcal{R}$ 上 $\mu_1=\mu_2$, 则在 $\sigma(\mathcal{R})$ 上 $\mu_1=\mu_2$.

证明 由于全空间 X 可表为 $\mathcal{R}$ 中一列互不相交的集的并, 并且 μ 在 $\mathcal{R}$ 上是 σ 有限的,

容易证明存在$\mathcal{R}$中一列互不相交的集$\{E_n\}$，使得

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n \text{ 并且 } \mu(E_n)<+\infty,\ \ n\geq 1.$$

(见本章习题第 11 题). 对每个$n\geq 1$，令

$$\mathcal{F}_n=\{A\in\sigma(\mathcal{R}):\mu_1(A\cap E_n)=\mu_2(A\cap E_n)\}.$$

若$A\in\mathcal{R}$，则$A\cap E_n\in\mathcal{R}$，于是由假设条件有

$$\mu_1(A\cap E_n)=\mu_2(A\cap E_n).$$

因此$A\in\mathcal{F}_n$. 这表明$\mathcal{R}\subset\mathcal{F}_n$. 容易证明$\mathcal{F}_n$是一个$\lambda$类. 由§1.3 推论 12，$\sigma(\mathcal{R})\subset\mathcal{F}_n$. 即对每个$A\in\sigma(\mathcal{R})$成立

$$\mu_1(A\cap E_n)=\mu_2(A\cap E_n),\ n\geq 1.$$

对n求和，即得$\mu_1(A)=\mu_2(A)$. 因此在$\sigma(\mathcal{R})$上$\mu_1=\mu_2$. ■

结合定理 5 和定理 6 知道，若μ是环$\mathcal{R}$上的σ有限测度，则μ可以唯一地延拓成为$\sigma(\mathcal{R})$上的测度(事实上，可以延拓成为更大的σ-代数即$\mathcal{R}^*$上的测度). 测度的延拓过程如图 2—3.

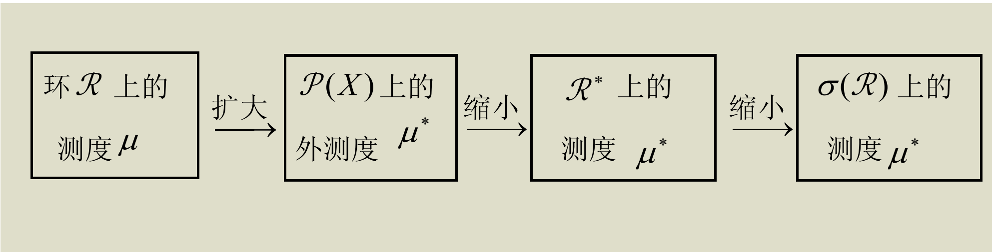

图 2—3

半环上的测度及延拓 上面讨论了定义在环上的测度的延拓. 但有时验证环上的一个集函数是一个测度也并非易事. 下面我们讨论如何从半环上的集函数得到一个测度.

设$\mathcal{C}$是一个半环，$\mathcal{R}=\mathcal{R}(\mathcal{C})$是由$\mathcal{C}$生成的环，即

$$\mathcal{R}=\{A=\bigcup_{i=1}^{k}A_i:\text{其中}A_1,\cdots,A_k\text{属于}\mathcal{C}\text{并且互不相交},\ k\geq 1\}.$$

(参见§1.3). 称$A=\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i$为$A$的一个分解式. 又设$\mu$是$\mathcal{C}$上的非负值集函数并且满足$\mu(\varnothing)=0$和有限可加性. 按下面的方式将$\mu$延拓到$\mathcal{R}$上. 对每个$A\in\mathcal{R}$，若$A$的一个分解式为$A=\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i$，则令

$$\mu(A)=\sum_{i=1}^{k}\mu(A_i). \tag{8}$$

由于对给定的 $A\in\mathcal{R}$, A 的分解式 $A=\bigcup_{i=1}^{k}A_i$ 不是唯一的. 因此需要证明如下的引理.

引理 7 设 μ 是半环 $\mathcal{C}$ 上的非负值集函数并且满足 $\mu(\varnothing)=0$ 和有限可加性. 则由(8)式定义的集函数 μ 的值不依赖于集的分解式的选取.

证明 设 $A\in\mathcal{R}$, $A=\bigcup_{i=1}^{k}A_i$ 和 $A=\bigcup_{j=1}^{m}B_j$ 是 A 的两个分解式. 令

$$E_{ij}=A_i\cap B_j,\ i=1,\cdots,k,\ j=1,\cdots,m.$$

则 $\{E_{ij},1\le i\le k,1\le j\le m\}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一组互不相交的集. 并且对每个 $1\le i\le k$ 和 $1\le j\le m$, 成立

$$A_i=\bigcup_{j=1}^{m}E_{ij},\quad B_j=\bigcup_{i=1}^{k}E_{ij}.$$

由于 μ 在 $\mathcal{C}$ 上是有限可加的, 我们有

$$\sum_{i=1}^{k}\mu(A_i)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\mu(E_{ij})=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\mu(E_{ij})=\sum_{j=1}^{m}\mu(B_j).$$

这表明 $\mu(A)$ 的值不依赖于 A 的分解式的选取.■

在§2.1 中我们定义了环上的测度. 同样, 若 μ 是半环 $\mathcal{C}$ 上的非负值集函数满足 $\mu(\varnothing)=0$ 和可数可加性, 则我们称 μ 是 $\mathcal{C}$ 上的测度.

定理 8 设 μ 是半环 $\mathcal{C}$ 上的测度. $\mathcal{R}$ 是由 $\mathcal{C}$ 生成的环. 则由(8)式定义的集函数 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上的测度.

证明 由引理 7, 对任意 $A\in\mathcal{R}$, $\mu(A)$ 的值不依赖于 A 的分解式的选取. 因此 μ 在 $\mathcal{R}$ 上的定义是确定的. 为证 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上的测度, 只需证明 μ 在 $\mathcal{R}$ 上是可数可加的. 设 $\{A_n\}$ 是 $\mathcal{R}$ 中的一列互不相交的集, 使得 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{R}$. 设 A 和 $A_n\,(n\ge 1)$ 的分解式分别为

$$A=\bigcup_{i=1}^{k}E_i,\quad A_n=\bigcup_{j=1}^{k_n}F_{n,j},\quad n\ge 1.$$

则 $\{F_{n,j}:1\le j\le k_n,\ n\ge 1\}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一列互不相交的集. 我们有

$$E_i = \bigcup_{l=1}^{\infty} C_{i,l}, \quad i = 1, \cdots, k.$$

其中 $\{C_{i,l}, 1 \le i \le k, l \ge 1\}$ 是由 $\{F_{n,j} : 1 \le j \le k_n, n \ge 1\}$ 重新编号得到的. 由于 μ 在 $\mathcal{C}$ 上是可数可加的, 我们有

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{l=1}^{\infty} \mu(C_{i,l}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \mu(F_{n,j}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

即 μ 在 $\mathcal{R}$ 上是可数可加的. 因此 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上的测度.■

定理 8 使得我们构造一个测度时更加容易. 在§2.3 和§4.6 我们将看到这个定理的应用.

测度的完备性 下面我们考虑测度的完备性. 设 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间, $E \subset X$. 若存在 $A \in \mathcal{F}$, $\mu(A) = 0$, 使得 $E \subset A$, 则称 E 为 μ-可略集. 在有些问题中会涉及到关于 μ-可略集可测性的讨论. 如果 μ-可略集不一定是可测集, 有时会带来一些不便. 然而对一般的测度空间而言, μ-可略集不一定是可测集.

例 1 设 $X = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \{X, \varnothing\}$. 令 $\mu(X) = \mu(\varnothing) = 0$, 则 μ 是 σ-代数 $\mathcal{F}$ 上的测度. 令 $E = [0, \frac{1}{2}]$, 则 E 是 μ-可略集, 但 $E \notin \mathcal{F}$.

定义 9 设 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间. 若每个 μ-可略集 E 都是可测集(即 $E \in \mathcal{F}$), 则称 $\mathcal{F}$ 关于测度 μ 是完备的, 或称测度空间 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 是完备的.

例如, 例 2 中的 $\mathcal{F}$ 关于 μ 不是完备的.

定理 10 设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上的测度, μ^* 是由 μ 导出的外测度. $\mathcal{R}^*$ 是 μ^*-的全体所成的集类. 则 $\mathcal{R}^*$ 关于测度 μ^* 是完备的.

证明 设 E 是 $\mu-$可略集. 则存在 $A \in \mathcal{R}^*$, 使得 $\mu^*(A) = 0$ 并且 $E \subset A$. 由外测度的单调性得到 $\mu^*(E) = 0$. 显然此时 E 满足卡氏条件, 故 $E \in \mathcal{R}^*$. 因此 $\mathcal{R}^*$ 关于测度 μ^* 是完备的. ■

以下部分不作为课堂讲授内容, 这里仅介绍结果, 略去证明.

设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上的测度, μ^* 是由 μ 导出的外测度, $\mathcal{R}^*$ 是 μ^*-可测集的全体所成的 σ-代数. 由定理 5, μ^* 是 $\mathcal{R}^*$ 上的测度并且 $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$. 一般情况下 $\sigma(\mathcal{R})$ 关于 μ^* 不一定是完备的. 而由定理 10, $\mathcal{R}^*$ 关于测度 μ^* 总是完备的. 因此一般情况下集类 $\mathcal{R}^*$ 要比 $\sigma(\mathcal{R})$ 大. 下面的定理表明 $\mathcal{R}^*$ 中的集与 $\sigma(\mathcal{R})$ 中的集至多相差一个零测度集.

定理 11 设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上的测度. 则对任意 $E \in \mathcal{R}^*$, 存在 $F \in \sigma(\mathcal{R})$, 使得 $F \supset E$ 并且 $\mu^*(F) = \mu^*(E)$. 特别地当 $\mu^*(E) < +\infty$ 时, $\mu^*(F - E) = 0$.

定理 12 设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上 σ-有限的测度. 则对任意 $E \in \mathcal{R}^*$, 存在 $F \in \sigma(\mathcal{R})$, 使得

$F \supset E$ 并且 $\mu^*(F-E)=0$.

定理 13 设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上 σ-有限的测度. 则 $E \in \mathcal{R}^*$ 当且仅当满足以下条件之一:

(i). 存在 $F \in \sigma(\mathcal{R})$ 和 μ^*-零测度集 A 使得 $F \supset E$ 并且 $E = F - A$..

(ii). 存在 $G \in \sigma(\mathcal{R})$ 和 μ^*-零测度集 A 使得 $G \subset E$ 并且 $E = G \cup A$..

定理 14 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间. 令

$$\mathcal{F}_\mu = \{A \cup E : A \in \mathcal{F}, E \text{是} \mu - \text{可略集}\}.$$

对任意 $B = A \cup E \in \mathcal{F}_\mu$, 令 $\widetilde{\mu}(B) = \mu(A)$. 则

(i). $\mathcal{F}_\mu$ 是 σ-代数并且 $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_\mu$.

(ii). $\widetilde{\mu}$ 是 $\mathcal{F}_\mu$ 上的测度并且在 $\mathcal{F}$ 上 $\widetilde{\mu} = \mu$.

(iii). 测度空间 $(X, \mathcal{F}_\mu, \widetilde{\mu})$ 是完备的.

定理 14 中的测度空间 $(X, \mathcal{F}_\mu, \widetilde{\mu})$ 称为是 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 的完备化空间. 定理 14 表明任何测度空间都存在其完备化空间.

定理 15 设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上 $\sigma-$有限的测度. 则 $(X, \sigma(\mathcal{R}), \mu^*)$ 的完备化空间是 $(X, \mathcal{R}^*, \mu^*)$.

特别地, 如果 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 是一个 σ-有限的测度空间. 则可以通过本节测度延拓的方法得到的 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 的完备化空间, 这个测度空间就是 $(X, \mathcal{F}^*, \mu^*)$, 其中 $\mathcal{F}^*$ 是 μ^*-可测集的全体所成的 σ-代数.

小 结 从较简单的集类环上的测度 μ 出发,扩大其定义域得到外测度 μ^*.再根据卡氏条件挑出 μ^*-可测集, μ^*-可测集的全体成为一个 σ-代数,外测度限制在 μ^*-可测集上成为测度. 这样就将环上的测度延拓到一个更大的集类 σ-代数上.这种方法构是造测度常用的方法.下一节将用这种方法构造重要的测度—Lebesgue 测度.

习 题 习题二, 第 9 题—第 14 题.