第三章　共轭空间与共轭算子

线性赋范空间与它的共轭空间之间的相互依存和相互作用是泛函分析中内容丰富的论题.共轭空间不仅仅是由原空间派生出来的一种新空间,而且提供了认识原空间的新工具. 特别是由此派生了强拓扑、弱拓扑乃至弱*拓扑的概念. 有界算子与它的共轭算子的关系也是如此. 本章将首先把共轭空间具体化——给出共轭空间的表现,然后讨论由共轭空间引出的序列的弱收敛和弱*收敛概念及其性质，讨论共轭算子和紧算子的性质,最后阐述自反空间和一致凸空间的特殊性质.

第 15 讲　共轭空间及其表现

教学目的

掌握常用空间的共轭空间的具体表现形式及其应用。

授课要点

1　空间 $(l^p)^* = l^q, 1 \le p < \infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

2　空间 $(L^p)^* = L^q, 1 \le p < \infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

3　空间 $C[a,b]^* = V_0[a,b].$

前面已讲过，对于任一线性赋范空间 X， X 的共轭空间 X^* 是 Banach 空间. 对于每个 $f \in X^*$，我们有

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1, x \in X} |f(x)|, \tag{1}$$

对于每个 $x \in X$，又有

$$\|x\| = \sup_{\|f\|\le 1,\, f\in X^*} |f(x)|. \qquad (2)$$

这些公式反映了线性赋范空间与它的共轭空间之间的对偶关系. 当然，作为线性赋范空间，X^*也存在共轭空间，记为 X^{**}，称 X^{**} 为 X 的二次共轭空间，类似地还有 X^{***} 等等.

在对共轭空间及其有关性质作进一步研究之前， 我们需要对它的抽象形式做一番直观化的工作. 我们记得，在第一章中曾经叙述过两个线性赋范空间的等距同构概念，等距同构的两个空间除了符号不同之外，在结构上无法区别. 在这种意义上我们也称两个空间相等. 在研究抽象空间的时候，有时我们不去研究这个空间本身，而是去研究一个与之等距同构的具体空间，后者称为前者的表现，同时也称具体空间的每个元素是抽象空间对应元素的表现.

例如, 在第二章第 1 讲中我们已经知道Φ^n上的线性泛函的一般形式是

$$f(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n, \quad \forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Phi^n \qquad (3)$$

其中 $a_1,\cdots,a_n$ 是 n 个标量. 不同的 f 对应有不同的 n 数组 $(a_1,\cdots,a_n)$.

直接计算可以求出 $\|f\| = \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)^{1/2}$. 若将 Φ^n 上的线性泛函 f 与 Φ^n 中的点 $(a_1,\cdots,a_n)$ 对应起来，则 $(\Phi^n)^*$ 与 Φ^n 之间可以建立一一对应，并且这种对应是到上的等距同构. 这样一来，$(\Phi^n)^*$ 中的元素可以通过一个 n 数组表现. 换句话说，Φ^n 本身就是 $(\Phi^n)^*$ 的表现. 在这种意义下我们说 $(\Phi^n)^* = \Phi^n$.

现在让我们看一些进一步的例子.

定理 1 $\left(l^1\right)^* = l^\infty$.

证明 $1°$ 对于每个 $a=\left(a_1,a_2,\cdots\right)\in l^\infty$，定义

$$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n,\quad \forall x=\left(x_n\right)\in l^1. \tag{4}$$

f 是 l^1 上的线性泛函，并且

$$\left|f\left(x\right)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|\left|x_n\right|\le\sup_{n\ge1}\left|a_n\right|\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n\right|=\sup_{n\ge1}\left|a_n\right|\|x\|.$$

从而 $\|f\|\le\sup_n\left|a_n\right|=\|a\|_\infty$.

$2°$ 反之，若 $f\in\left(l^1\right)^*$，取 $e_n=\left(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n},0,\cdots\right)$，$n\ge1$，易知 $e_n\in l^1$. 令 $a_n=f\left(e_n\right)$，首先 $\left|a_n\right|\le\|f\|\|e_n\|=\|f\|$. 若令 $a=\left(a_1,a_2,\cdots\right)$，则 $a\in l^\infty$ 并且 $\|a\|_\infty=\sup_n\left|a_n\right|\le\|f\|$. 任取 $x=\left(x_i\right)\in l^1$，设 $x^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}x_i e_i$，则

$$\left\|x^{(n)}-x\right\|=\sum_{i=n+1}^{\infty}\left|x_i\right|\to0\quad\left(n\to\infty\right).$$

由 f 的连续性

$$f\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(x^{(n)}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i f\left(e_i\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n,$$

这说明式 $\left(4\right)$ 是 l^1 上线性泛函的一般形式.

$3°$ 令 $T:\left(l^1\right)^*\to l^\infty$，$Tf=\alpha$. 由 $1°$，T 是到上的线性映射. $1°$ 与 $2°$ 一起说明 $\|Tf\|_\infty=\|a\|_\infty=\|f\|$，$\forall f\in\left(l^1\right)^*$. 从而 T 是一一映射，$\left(l^1\right)^*$ 与

l^∞等距同构，即$\left(l^1\right)^* = l^\infty$.

类似地可以证明$\left(l^p\right)^* = l^q\left(1<p<\infty, p^{-1}+q^{-1}=1\right)$，此外用类似的方法还可以证明 $c^* = l^1$, ${c_0}^* = l^1$.

根据 Hahn－Banach 定理(见本节开头提到的式子)，我们有

$$\|x\|_p = \sup_{\|a\|_q \le 1}\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right|,\ \forall x = \left(x_n\right) \in l^p \tag{5}$$

这里$a = \left(a_n\right) \in l^q$.

定理 2 $L^p[a,b]^* = L^q[a,b]\left(1<p<\infty, p^{-1}+q^{-1}=1\right)$.

证明 1°对于每个$a(t) \in L^q[a,b]$，定义

$$f(x) = \int_a^b x(t)a(t)dt,\ \forall a(t) \in L^p[a,b]. \tag{6}$$

f是$L^p[a,b]$上的线性泛函，由 Holder 不等式，

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)a(t)dt\right| \le \|x\|_p \|a\|_q,$$

故$\|f\| \le \|a\|_q$.

2° 若$\forall f \in L^p[a,b]^*$，令$\chi_t = \chi_{[a,t]}$为$[a,t]$的特征函数，并且记$f(\chi_t) = g(x)$. 对于$[a,b]$中的任一组区间$[a_i,b_i]$,

$$a \le a_1 < b_1 \le \cdots \le a_n < b_n \le b,$$

记 $\varepsilon_i = \overline{\left(g(b_i) - g(a_i)\right)}\left|g(b_i) - g(a_i)\right|^{-1}$ （当 $g(b_i) - g(a_i) = 0$ 时$\varepsilon_i = 0$），则

$$\sum_{i=1}^{n}\left|g(b_i)-g(a_i)\right|=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\left(f\left(\chi_{b_i}\right)-f\left(\chi_{a_i}\right)\right)$$

$$\leq\|f\|\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\left(\chi_{b_i}-\chi_{a_i}\right)\right\|_p$$

$$=\|f\|\left(\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

所以当 $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$ 很小时，$\sum_{i=1}^{n}\left|g(b_i)-g(a_i)\right|$ 也很小，故 $g(t)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数．设 $g'(t)=a(t)$，$\mu-a.e$，$a(t)$ 可积，从而

$$g(t)=g(a)+\int_a^t a(\tau)d\tau，\quad t\in[a,b].$$

但 $\chi_a=0$，$\mu-a.e.$．故 $g(a)=f(\chi_a)=0$，所以

$$g(t)=\int_a^t a(\tau)d\tau，\quad t\in[a,b].$$

若 $x(t)$ 是 $[a,b]$ 上的阶梯函数，$x(t)=\sum_{i=1}^{n}a_i\left(\chi_{t_i}-\chi_{t_{i-1}}\right)$，这里 $a_i\in\Phi$，$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，则

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\left(f\left(\chi_{t_i}\right)-f\left(\chi_{t_{i-1}}\right)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i\left(g(t_i)-g(t_{i-1})\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i\int_{t_{i-1}}^{t_i}a(t)dt$$

$$=\int_a^b x(t)a(t)dt\quad. \tag{7}$$

若 $x(t)$ 是有界可测函数，不妨设 $|x(t)|\leq M$，$t\in[a,b]$．则存在阶梯函

数列 $x_n(t)$，

$$\left|x_n(t)\right| \le M, \quad t \in [a,b], \quad n = 1, 2, \cdots.$$

并且 $x_n(t) \to x(t)$，$\mu - a.e.$. 由 Lebesgue 控制收敛定理，

$$\left\|x_n - x\right\|_p = \left(\int_a^b \left|x_n(t) - x(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

此外，$x_n(t)a(t) \to x(t)a(t)$，$\mu - a.e.$. 并且

$$\left| \; x_n(t)a(t) \; \right| \le M\left|a(t)\right|, \; a.e.$$

故从式 (7)，令 n→∞，由 Lebesque 控制收敛定理得到

$$f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)a(t)dt = \int_a^b x(t)a(t)dt.$$

即 (7) 对于有界可测函数成立.

现在证明 $a(t) \in L^q[a,b]$. 令

$$x_n(t) = \begin{cases} \overline{a(t)}\left|a(t)\right|^{q-2}, & \text{若}\left|a(t)\right|^{q-1} \le n, \\ 0, & \text{若}\left|a(t)\right|^{q-1} > n. \end{cases}$$

（这里记 $0/0 = 0$）. $x_n(t)$ 是有界可测函数. 令 $E_n = \left\{t, \left|a(t)\right|^{q-1} \le n\right\}$，则一方面有

$$\left|f(x_n)\right| \le \|f\|\left\|x_n\right\|_p = \|f\|\left(\int_{E_n}\left|a(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

另一方面，

$$f\left(x_n\right)=\int_a^b x_n\left(t\right)a\left(t\right)dt=\int_{E_n}\left|a\left(t\right)\right|^q dt,$$

故

$$\int_{E_n}\left|a\left(t\right)\right|^q dt\le\|f\|\left(\int_{E_n}\left|a\left(t\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

即 $\left(\int_{E_n}\left|a\left(t\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{p}}\le\|f\|$，$n$ 是任意的，所以

$$\left(\int_a^b\left|a\left(t\right)\right|^q dt\right)^q\le\|f\|,\quad a\left(t\right)\in L^q$$

最后，对于任意的 $x\left(t\right)\in L^p\left[a,b\right]$，取

$$x_n\left(t\right)=\begin{cases}x\left(t\right), & \left|x\left(t\right)\right|\le n,\\ 0, & \left|x\left(t\right)\right|>n,\end{cases}$$

记 $B_n=\left\{t,\left|x\left(t\right)\right|>n\right\}$，则 B_n 的测度 $\mu\left(B_n\right)\to 0$，

$$\left\|x_n-x\right\|_p=\left(\int_{B_n}\left|x\left(t\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\to 0, n\to\infty.$$

从而

$$\left|\int_a^b x_n\left(t\right)a\left(t\right)dt-\int_a^b x\left(t\right)a\left(t\right)dt\right|\le\left\|x_n-x\right\|_p\left\|a\right\|_q\to 0,$$

并且

$$f\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n\left(t\right)a\left(t\right)dt=\int_a^b x\left(t\right)a\left(t\right)dt.$$

这说明式 $\left(6\right)$ 是 $L^p\left[a,b\right]$ 上线性泛函的一般形式.

3° 定义 $T:L^p\left[a,b\right]^*\to L^q\left[a,b\right]$，$Tf=a$. 由以上证明知道 T 是到上的等距同构，从而也是一一映射，故 $L^p\left[a,b\right]^*=L^q\left[a,b\right]$.

类似地可以证明 $L^1[a,b]^* = L^\infty[a,b]$.

由 Hahn－Banach 定理，我们有

$$\|x\|_p = \sup_{\|a\|_q \le 1}\left|\int_a^b a(t)x(t)\,dt\right|,\quad \forall x \in L^p[a,b]$$

这里 $a \in L^q[a,b]$，$p \ge 1$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

下面定理被称为 Riesz 表现定理.

定理 3 $C[a,b]^* = V_0[a,b]$.

证明 1° 对于每个 $a(t) \in V_0[a,b]$，定义

$$f(x) = \int_a^b x(t)\,da(t),\quad \forall x \in C[a,b]. \tag{8}$$

f 是 $C[a,b]$ 上的线性泛函，并且

$$|f(x)| \le \max_{a\le t\le b}|x(t)|\int_a^b |da(t)| = \bigvee_a^b(a)\|x\|,$$

所以 $\|f\| \le \bigvee_a^b(a)$.

2° 若 $f \in C[a,b]^*$，考虑空间 $B[a,b]$，$B[a,b]$是$[a,b]$上有界函数的全体. 对于每个 $x \in B[a,b]$，$\|x\| = \sup_{a\le t\le b}|x(t)|$. 显然，$C[a,b]$是$B[a,b]$的线性子空间. 根据 Hahn－Banach 定理，对于 f，存在 $F \in B[a,b]^*$，在 $C[a,b]$上，$F(x) = f(x)$，并且$\|F\| = \|f\|$.

设 χ_t 是 $[a,t]$的特征函数，$g(x) = F(\chi_t)$，若

$$a \le a_1 < b_1 \le \cdots \le a_n < b_n = b,$$

令

$\varepsilon_i = \overline{\left(g\left(b_i\right)-g\left(a_i\right)\right)}\left|g\left(b_i\right)-g\left(a_i\right)\right|^{-1}$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\left|g\left(b_i\right)-g\left(a_i\right)\right| = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\left(F\left(\chi_{b_i}\right)-F\left(\chi_{a_i}\right)\right)$$

$$\le \|F\|\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\left(\chi_{b_i}-\chi_{a_i}\right)\right\| = \|F\|.$$

$g(t)$ 是有界变差函数，并且 $\bigvee_a^b(g) \le \|F\| = \|f\|$. 若 $x(t) \in C[a,b]$，$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ 是 $[a,b]$ 的任一分划. $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，故 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $\max\limits_{1\le i\le n}\left(t_i - t_{i-1}\right) < \delta$ 时，$\left|x\left(t_i\right)-x\left(t_{i-1}\right)\right| < \varepsilon$. 令

$$x' = \sum_{i=1}^{n} x\left(t_i\right)\left(\chi_{t_i} - \chi_{t_{i-1}}\right),$$

则 $x' \in B[a,b]$ 并且

$$\|x - x'\| = \sup_{t_{i-1}\le t\le t_i}\left|x(t) - x\left(t_i\right)\right| < \varepsilon.$$

于是

$$\left|\int_a^b x dg - F\left(x'\right)\right| = \left|\int_a^b x dg - \sum_{i=1}^{n} x\left(t_i\right)\left(F\left(\chi_{t_i}\right) - F\left(\chi_{t_{i-1}}\right)\right)\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left|x(t) - x\left(t_i\right)\right|\left|dg\right|$$

$$\le \varepsilon \bigvee_a^b(g) \le \varepsilon\|f\|,$$

同时

$$\left|F(x)-\int_a^b xdg\right| \le \left|F(x)-F(x')\right| + \left|F(x')-\int_a^b xdg\right|$$

$$\le \|F\|\|x-x'\| + \varepsilon\|f\| = 2\|f\|\varepsilon,$$

ε是任意的，故$F(x)=\int_a^b xdg$.

现在取$a(t)$是$g(t)$的右连续修正，即

$$\alpha(t)=\begin{cases} 0, & t=a \\ g(t+)-g(a), & a<t<b \\ g(b)-g(a), & t=b \end{cases}$$

其中$g(t+)$是g在t处的右极限，显然α在(a,b)上右连续，故$a(t)\in V_0[a,b]$. 我们证明$\bigvee_a^b(\alpha)\le\bigvee_a^b(g)$并且对于每个$x\in C[a,b]$，$\int_a^b xdg=\int_a^b xd\alpha$.

实际上，$g(t)$的不连续点是可数的，对于分划$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$和$\forall\varepsilon>0$，取s_i，$t_i<s_i<t_{i+1}(s_0=a,s_n=b)$，使$g(t)$在$s_i$连续并且$\left|g(t+)-g(s_i)\right|<\frac{\varepsilon}{2n}$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha(t_i)-\alpha(t_{i+1})\right|$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\left(\left|g(t_i+)-g(s_i)\right|+\left|g(s_i)-g(s_{i-1})\right|+\left|g(s_{i-1})-g(t_{i-1}+)\right|\right)$$

$$\le n\frac{\varepsilon}{2n}+\sum_{i=1}^{n}\left|g\left(s_i\right)-g\left(s_{i-1}\right)\right|+n\frac{\varepsilon}{2n}$$

$$\le \bigvee_a^b(g)+\varepsilon,$$

ε是任意的，故 $\bigvee_a^b(\alpha)\le\bigvee_a^b(g)$.

设 $x\in C[a,b]$，若 t_i 是 $g(t)$ 的连续点，则

$$\alpha\left(t_i\right)-\alpha\left(t_{i+1}\right)=g\left(t_i+\right)-g\left(t_{i-1}+\right)=g\left(t_i\right)-g\left(t_{i-1}\right),$$

于是由积分的存在性知

$$\int_a^b x d\alpha=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x\left(t_i\right)\left(\alpha\left(t_i\right)-\alpha\left(t_{i+1}\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x\left(t_i\right)\left(g\left(t_i\right)-g\left(t_{i-1}\right)\right)=\int_a^b x dg.$$

最后我们证明 α 是由 g 惟一决定的. 实际上若 $\beta\in V_0[a,b]$ 使以上条件成立，则 $\beta(a)=0=\alpha(a)$，并且 $\forall t_0\in[a,b]$，若 t_0 为 $\alpha(t)$ 及 $\beta(t)$ 的连续点，从而也是 $\bigvee_a^t(\alpha),\bigvee_a^t(\beta)$ 的连续点，取

$$x_n(t)=\begin{cases}1, & t\in\left[a,t_0\right]\\ \text{线性}, & t\in\left(t_0,t_0+\dfrac{1}{n}\right)\\ 0, & t\in\left[t_0+\dfrac{1}{n},b\right)\end{cases},$$

则 $x_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而

$$\int_a^b x_n(t)\,d\alpha=\int_a^b x_n(t)\,dg=\int_a^b x_n(t)\,d\beta .$$

于是

$$\alpha(t_0)+\int_{t_0}^{t_0+\frac{1}{n}} x_n(t)\,d\alpha=\beta(t_0)+\int_{t_0}^{t_0+\frac{1}{n}} x_n(t)\,d\beta ,$$

并且

$$\left|\beta(t_0)-\alpha(t_0)\right|\le\int_{t_0}^{t_0+\frac{1}{n}}\left|x_n(t)\right|\left|d\alpha\right|+\int_{t_0}^{t_0+\frac{1}{n}}\left|x_n(t)\right|\left|d\alpha\right|$$

$$\le\bigvee_a^{t_0+\frac{1}{n}}(\alpha)+\bigvee_a^{t_0+\frac{1}{n}}(\beta)\to 0(n\to\infty).$$

于是 $\alpha(t_0)=\beta(t_0)$. 像 t_0 这样的点在 $[a,b]$ 上是稠密的，故知 $\alpha(t)=\beta(t)$，$t\in(a,b)$. 取 $x(t)\equiv 1$，得到

$$\alpha(b)=\alpha(b)-\alpha(a)=\int_a^b x_n d\alpha=\int_a^b x_n d\beta$$

$$=\beta(b)-\beta(a)=\beta(b).$$

3° 现在定义 $T:C[a,b]^*\to V[a,b]$， $Tf=\alpha$. 则由 2°，

$$\|Tf\|=\|\alpha\|\le\bigvee_a^b(\alpha)\le\bigvee_a^b(g)\le\|f\|.$$

由 1°，$\|f\|\le\bigvee_a^b(\alpha)=\|\alpha\|=\|Tf\|$，即 $\|Tf\|=\|f\|$. 故 T 为一一的到上的等距同构，所以 $C[a,b]^*=V[a,b]$.

Riesz 表现定理还可以推广到更广泛的空间 $C(\Omega)$ 上， 这里 Ω 是很一般的拓扑空间中的带有正则测度的集合. 这里不拟叙述了.

现将常用的几个共轭空间列表如下，其中$1\leq p<\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，

共轭空间	线性泛函的一般形式
$\left(\Phi^n\right)^*=\Phi^n$	$f\left(x\right)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$.
$\left(l^p\right)^*=l^q$	$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n$.
$c_0{}^*=l^1$	$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n$.
$c^*=l^1$	$f\left(x\right)=a\lim_{n\to\infty}x_n+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n$.
$\left(L^p\right)^*=L^q$	$f\left(x\right)=\int_a^b x\left(t\right)\alpha\left(t\right)dt$.
$C\left[a,b\right]^*=V\left[a,b\right]$	$f\left(x\right)=\int_a^b x\left(t\right)d\alpha\left(t\right)$.