第 13 讲　Hahn-Banach 定理的应用

教学目的
理解延拓定理的应用。
授课要点
通过介绍 Hahn-Banach 定理在最佳逼近方面的应用帮助学生认识这一定理应用的途径和方式。

Hahn-Banach 定理在理论上和应用上都是十分重要的，它往往提供了某些学科或学科分支的理论基础. 这里介绍一些它们在逼近论方面的应用.

定义 3　设 X 是线性赋范空间，E 是 X 的子集合，$x \in X$，称 $y \in E$ 是 x 关于 E 的最佳逼近元，若

$$\|x-y\| = \inf_{z \in E} \|x-z\|. \tag{1}$$

首先应该知道一般说来，最佳逼近元并不总是存在的.

例 1　设 $E \subset C[0,1]$，E 是 $[0,1]$ 上定义的任意阶多项式全体构成的线性子空间，取 $x(t) = e^t \in C[0,1]$，尽管

$$d(x,E) = \inf_{z \in E} \|x-z\| = 0,$$

但不存在 $y \in E$ 使得 $\|x-y\| = 0$，因为 e^t 不是多项式. 这说明不存在 e^t 关于 E 的最佳逼近元.

定理 1　设 X 是线性赋范空间，E 是 X 的闭线性子空间，$x_0 \in X$，则 $y \in E$ 是 x_0 关于 E 的最佳逼近元当且仅当存在 $f \in X^*$ 使得 $\|f\| = 1$，

$f_0(x)=0$，$\forall x\in E$ 并且 $f(x_0)=\|x_0-y\|$.

证 明 当 $x_0\in E$ 时，x_0 是它自己关于 E 的最佳逼近元，此时容易证明结论成立.

现设 $x_0\notin E$，若 y 是 x_0 关于 E 的最佳逼近元，即

$$\|x_0-y\|=\inf_{z\in E}\|x_0-z\|=d,$$

此时 $d>0$. 设 $E_1=\operatorname{span}\{x_0,E\}$，令 $f_0(x_1)=ad$，$\forall x_1=z+ax_0$，其中 $z\in E$，$\alpha\in\Phi$，则 f_0 是 E_1 上的线性泛函，并且 $f_0(E)=0$，$f_0(x_0)=d$. 由于

$$|f_0(x_1)|=|a|d\le|a|\left\|\frac{z}{a}+x_0\right\|=\|z+ax_0\|=\|x_1\|,$$

所以 $\|f_0\|\le 1$. $\forall\varepsilon>0$，取 $z\in E$ 使得 $\|x_0-z\|<d+\varepsilon$，则

$$\|f_0\|\ge\left|f_0\left(\frac{x_0-z}{\|x_0-z\|}\right)\right|=\frac{|f_0(x_0)|}{\|x_0-z\|}\ge\frac{d}{d+\varepsilon},$$

于是 $\|f_0\|=1$，由 Hahn－Banach 定理，存在 $f\in X^*$ 使得在 E_1 上，$f(x)=f_0(x)$. 特别地，$f(E)=f_0(E)=0$. 从而

$$f(x_0)=f_0(x_0)=d=\|x_0-y\|.$$

反之，若 $f\in X^*$ 满足定理中条件，对于任何 $z\in E$，

$$\|x_0-y\|=|f(x_0)|=|f(x_0-z)|\le\|x_0-z\|,$$

由于 $y\in E$，故 $\|x_0-y\|=\inf_{z\in E}\|x_0-z\|$.

由定理前一部分的证明容易得出以下推论.

推论 1 设 X 是线性赋范空间，E 是 X 的线性子空间，$x_0\in X$，$d(x_0,E)=\inf_{z\in E}\|x_0-z\|=d>0$，则存在 $f\in X^*$，使得 $\|f\|=1$，

$f(x_0)=d$，并且 $f(x)=0$，$\forall x\in E$.

定理 1 实际上是最佳逼近元的判定定理. 下面定理可以看成最佳逼近元的存在定理.

定理 2 设 X 是线性赋范空间，$E\subset X$ 是有限维子空间，则对于每个 $x\in X$，x 关于 E 的最佳逼近元存在.

证 明 任取 $y_0\in E$，考虑集合

$$F=\left\{z\in E;\|x-z\|\le\|x-y_0\|\right\}.$$

容易验证 F 是 E 中的有界闭集，是 E 有限维的，从而是紧集并且 $d(x,F)=d(x,E)$. 取 $z_n\in F$ 使得 $\|x-z_n\|\to d(x,F)$，此时存在子列 $z_{n_k}\to z_0\in F$，于是

$$\|x-z_0\|=\lim_{n\to\infty}\|x-z_n\|=d(x,F)=d(x,E).$$

z_0 即是 x 关于 E 的最佳逼近元.

例 2 对于实空间 $C[a,b]$，由 $\left\{1,t,\cdots\cdots,t^n\right\}$ 张成的线性子空间记为 E_n，E_n 是有限维的，从而是闭的. 由定理 2，$\forall x\in C[a,b]$，x 到 E_n 的最佳逼近元存在. 即至少存在一组实数 $a_0,\cdots\cdots,a_n$，使得 $x_0(t)=a_0+a_1t+\cdots\cdots+a_nt^n$ 满足

$$\|x-x_0\|=\sup_{t\in[a,b]}\left|x(t)-x_0(t)\right|=d(x,E_n). \tag{2}$$

例 3 对于复空间 $L^2[-\pi,\pi]$，若 E_n 是由 $\left\{e^{ikt};-n\le k\le n\right\}$ 张成的线性子空间，则 $\forall x\in L^2[-\pi,\pi]$，存在复数 c_k，$-n\le k\le n$ 使得 $x_0=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikt}$ 满足

$$\left\|x-x_0\right\|_2=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|x(t)-x_0(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}=d\left(x,E_n\right). \tag{3}$$

思考题

1、证明一个线性赋范空间 X 中的某一点到线性子空间 E 的最佳逼近元的全体是 E 中的凸集.

2、即使是闭子空间，一点到它的最佳逼近元也未必存在. 例如设

$$E=\{x=(x_n)\in c_0;\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}x_n=0\},$$

则 E 在 c_0 中闭，但 $x_0=(2,0,\cdots)$ 这一点关于 E 没有最佳逼近元. 此例也说明定理 2 关于无穷维子空间不成立.

有了最佳逼近元的存在性和判别准则，自然会考虑到唯一性问题. 为此我们需要一个新的概念.

定义 2 线性赋范空间 X 称为是严格凸的，若 $\forall x,y\in X$，当 $x\neq y$，$\|x\|=\|y\|=1$ 时

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|<1. \tag{4}$$

从几何上说，严格凸空间单位球面上任意两点的中点不在球面上，严格凸是逼近论中的一个基本概念，我们先给出严格凸空间的例子.

例 4 空间 $L^p[a,b]\,(1<p<\infty)$ 是严格凸的.

若存在 $f,g\in L^p[a,b]$，$\|f\|_p=\|g\|_p=1$，并且 $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p=1$，即

$\|f+g\|_p=\|f\|_p+\|g\|_p$，由第一章第二讲例 1 知道 Minkowski 不等式中等号成立当且仅当 $f(t)=kg(t)$，$\mu-a$，e，其中 k 为非负常数，由 $\|f\|_p+\|g\|_p=1$ 知 $k=1$，故 $f=g$，这说明当 $f\neq g$ 时 $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p<1$.

同样的，空间 $l^p\ (1<p<\infty)$ 是严格凸的.

Hilbert 空间是严格凸的，这可以由平行四边形公式直接得到.

例 5 l^1 不是严格凸的，实际上只需取

$$x=(1,0,0,\cdots),\quad y=(0,1,0,\cdots),$$

则 $x\neq y$，$\|x\|=\|y\|=1$，但 $\|x+y\|=2$.

l^∞ 也不是严格凸的，实际上取

$$x=(1,0,\cdots),\quad y=(1,-1,0,\cdots),$$

则 $x\neq y$，$\|x\|=\|y\|=1$，$\|x+y\|=2$.

此外空间 $c,c_0,L_1[a,b],L_\infty[a,b],C[a,b]$ 也不是严格凸的，读者可直接验证之.

定理 3 设 X 是线性赋范空间，则以下条件等价：

（1） X 是严格凸的.

（2） 对于 X 中任何凸子集 E 和 $x\in X$，x 关于 E 至多有一个最佳逼近元.

（3） 对于每个 $f\in X^*$，闭单位球 S_X 上至多有一点 x_0 使得 $f(x_0)=\|f\|$.

证明 $(1)\Rightarrow(2)$ 不妨设 $x\notin E$，若有 $x_0,x_0'\in E$ 同时使 $\|x-x_0\|=\|x-x_0'\|=d(x,E)=M$. 则此时

$$\left\|\frac{1}{2}\left(x+x_0\right)-x\right\| \leq \frac{1}{2}\left\|x-x_0\right\|+\frac{1}{2}\left\|x-x_0'\right\| \leq M,$$

但 E 是凸集，从而 $\frac{1}{2}\left(x+x_0\right) \in E$，故应有

$$\left\|\frac{1}{2}\left(x+x_0\right)-x\right\| \geq M \text{，于是} \quad \left\|\frac{1}{2}\left(x+x_0\right)-x\right\| = M .$$

记 $y=\frac{x-x_0}{M}, z=\frac{x-x_0'}{M}$，则 $\|y\|=\|z\|=1$，但

$$\left\|\frac{y+z}{2}\right\|=\frac{1}{M}\left\|x-\frac{1}{2}\left(x+x_0\right)\right\|=1,$$

此与严格凸性矛盾.

$(2) \Rightarrow (3)$　若有两个不同点 $x_0, x_0' \in S_X$ 使得

$$f\left(x_0\right)=f\left(x_0'\right)=\|f\|,$$

不妨设 $\|f\|=1$，考虑闭凸集

$$\left[x_0, x_0'\right]=\left\{z=t x_0+(1-t) x_0' ; 0 \leq t \leq 1\right\}$$

则 $f(z)=f\left(t x_0+(1-t) x_0'\right)=1$，$0 \leq t \leq 1$，从而

$$1 \leq|f(z)| \leq\|f\|\|z\| \leq\|z\| .$$

另一方面，

$$\|z\| \leq t\left\|x_0\right\|+(1-t)\left\|x_0'\right\| \leq 1,$$

故 $\|z\|=1$，这说明 0 点到 $\left[x_0, x_0'\right]$ 有无穷多个最佳逼近元，与 (2) 矛盾.

$(3) \Rightarrow (1)$. 若 X 不是严格凸的，则有 $x, y \in X, x \neq y$ 使得 $\|x\|=\|y\|=\left\|\frac{x+y}{2}\right\|=1$. 由 Hahn－Banach 定理，存在 $f \in X^*$，$\|f\|=1$，$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=1$，此时由于 $|f(x)| \leq 1$，$|f(y)| \leq 1$，$\frac{1}{2}(f(x)+f(y))=1$，故必有 $f(x)=f(y)=1$，从而对于任何 t，$0 \leq t \leq 1$，$f(t x+(1-t) y)=1$，与 (3) 矛盾.

根据定理 2 与定理 3，例 3 中的最佳逼近元是唯一的.

作为严格凸性的另一个应用，我们考虑线性泛函延拓的唯一性问题. Hahn－Banach 定理只解决了延拓的存在性，而一般来说，唯一性并不成立.

例 6 在 R^2 中定义范数

$$\left\|\left(x_1, x_2\right)\right\| = \left|x_1\right| + \left|x_2\right|, \quad \forall (x_1, x_2) \in R^2$$

则 $G = \left\{\left(x_1, 0\right); x_1 \in R^1\right\}$ 是 R^2 的线性子空间，$f_0\left(x_1, 0\right) = x_1$ 是 G 上的线性泛函. 由

$$\left|f_0\left(x_1, 0\right)\right| = \left|x_1\right| = \left\|\left(x_1, 0\right)\right\|,$$

容易知道 $\left\|f_0\right\| = 1$，故 f_0 连续.

对于每个 $\beta \in R$，$F\left(x_1, x_2\right) = x_1 + \beta x_2$ 都是 f_0 的延拓并且

$$\begin{aligned}\left|F\left(x_1, x_2\right)\right| &\le \left|x_1\right| + |\beta|\left|x_2\right| \le \max\left(1, |\beta|\right)\left(\left|x_1\right| + \left|x_2\right|\right) \\ &= \max\left(1, |\beta|\right)\left\|\left(x_1, x_2\right)\right\|.\end{aligned}$$

于是当 $|\beta| \le 1$ 时，F 是保持范数的延拓，这种延拓的个数有不可数无穷多个.

这里我们给出一个保证线性泛函延拓唯一性的条件，而将其证明略去.

定理 7 设 X 是线性赋范空间，为了使 X 的每个线性子空间上的连续线性泛函都有唯一的保持范数的延拓，必须并且只须共轭空间 X^* 是严格凸的.