第 6 讲　紧性与连续映射

教学目的：掌握紧集的概念与基本属性。

授课要点：

1、　紧集、相对紧集和完全有界集的定义与序列式刻划。

2、　紧集在连续映射下的特性。

3、　某些空间中紧子集的特征。

我们称集族$\{B_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$覆盖$A$，若$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\supset A.$

定义 1　设X是度量空间，$A\subset X$.

（1）称A是紧的，若 X 中的任一开集族覆盖A时，其中存在有限个开集仍覆盖A.

（2）A称为是相对紧的，若$\overline{A}$紧.

（3）称$E\subset X$是A的ε网，若$\bigcup\limits_{x\in E}O(x,\varepsilon)\supset A$.

（4）称A是完全有界的，若$\forall\varepsilon>0$，X中存在由有限个元素构成的A的ε网.

注意，在定义 1（3）中，作为A的ε网的集合E，并没有要求$E\subset X$． 对于一个集合来说，是否要求$E\subset X$并不改变其完全有界性.

首先让我们来看一个例子.

对于$X=\ell^2$，若$e_n=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n},0,\cdots)$，则$\|e_n\|_2=1$．令$A=\{e_n;n\geq1\}$，则$A$不是紧集．实际上，$\forall m\neq n$，$\|e_m-e_n\|=\sqrt{2}$．若取$B_n=O\left(e_n,\dfrac{1}{2}\right)$，则$\{B_n,n\geq1\}$是$A$的开覆盖．但由于每个$B_n$只包含一个$e_n$，故其中不包含任何有限子族覆盖$A$．注意$A$是$\ell^2$中的有界集，由于$A$中不存在 Cauchy 序列，所以它还是闭集.

此例告诉我们在无穷维空间情况，有界闭集并不一定是紧集，其中每个无穷序列也不必有收敛的子序列．换句话说在无穷维空间，Bolzano-Weierstrass 定理并不成立.

思考题

（1）　证明定义 1（4）下面“注意”中所说的事实。

（2） 证明完全有界集一定是有界集.

定理 1 设 X 是度量空间，$A\subset X$，则下面两条件等价：

（1）A 是紧集.

（2）A 中任一无穷序列 $\{x_n\}$ 包含有子序列 $\{x_{n_k}\}$，$x_{n_k}\to x$ 并且 $x\in A$.

证明 先设 A 紧，$\{x_n\}$ 是 A 中的无穷序列. 若 $\{x_n\}$ 无子序列收敛于 A 中的元，则 $\forall x\in A$，$\exists r_x>0$ 和自然数 n_x，使得 $O(x,r_x)\bigcap\{x_n;n\ge n_x\}=\varnothing$. 注意到 $\bigcup\limits_{x\in A}O(x,r_x)\supset A$，由 A 的紧性，存在 $x_1',\cdots,x_k'$，使得 $\bigcup\limits_{j=1}^{k}O(x_j',r_{x_j'})\supset A$. 但当 $m\ge\max\{n_{x_1'},\cdots,n_{x_k'}\}$ 时，$O(x_j',r_{x_j'})\bigcap\{x_n;n\ge m\}=\varnothing$，从而

$$\{x_n;n\ge m\}\subset\bigcup_{j=1}^{k}O(x_j',r_{x_j'})\bigcap\{x_n;n\ge m\}=\varnothing,$$

矛盾.

反之，为证 A 紧，设 $\{B_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ 是 A 的一族开覆盖. $\forall x\in A$，$\exists B_\lambda$，$x\in B_\lambda$. B_λ 是开集，故存在 $r>0$，$O(x,r)\subset B_\lambda$. 记 $r_x=\sup\{r;O(x,r)\subset B_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$，显然 $r_x>0$. 我们证明 $r_0=\inf\limits_{x\in A}r_x>0$（称 r_0 是 A 的 Lebesque 数）.

由下确界定义，$\exists x_n\in A$，$r_{x_n}\to r_0$. 根据定理中条件，存在子序列 x_{n_n}，$x_{n_n}\to x_0\in A$. 不妨设 $x_0\in B_{\lambda_0}$，于是存在 k_0，当 $k\ge k_0$ 时，$x_{n_n}\in O\left(x_0,\dfrac{r_{x_0}}{2}\right)$，此时

$$O\left(x_{n_n},\frac{r_{x_0}}{2}\right)\subset O\left(x_0,r_{x_0}\right)\subset B_{\lambda_0}.$$

于是 $r_{x_{n_k}}>\dfrac{r_{x_0}}{2}\,(k\ge k_0)$，$r_0=\lim\limits_{k\to\infty}r_{x_{n_k}}\ge\dfrac{r_{x_0}}{2}>0$.（这说明紧集的 Lebesque 数大于 0.）

现在任取 $x_1\in A$，若 $O(x_1,r_0)\supset A$ 并且 $O(x_1,r_0)\subset B_{\lambda_1}$，则 B_{λ_1} 覆盖 A. 否则存在 $x_2\in A\setminus O(x_1,r_0)$. 若 $\bigcup\limits_{i=1}^{2}O(x_i,r_0)\supset A$ 并且 $O(x_2,r_0)\subset B_{\lambda_2}$，则 B_{λ_1}，B_{λ_2} 覆盖 A. 否则又存在 $x_3\in A\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{2}O(x_i,r_0)$，…. 如果这一过程可以无限进行，由此得到序列 $\{x_n\}$，显然 $d(x_m,x_n)\ge r_0\,(m\ne n)$. $\{x_n\}$ 无收敛子序列，与（2）矛盾. 于是对于某个 n_0 有

$\bigcup\limits_{i=1}^{n_0} O(x_i,r_0)\supset A$. 设 $O(x_i,r_0)\subset B_{\lambda_i}$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n_0} B_{\lambda_i}\supset \bigcup\limits_{i=1}^{n_0} O\left(x_i,r_0\right)\supset A$，$A$ 被有限覆盖. $\{B_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ 是任意的，由定义 A 是紧集.

推论 1 每个紧集是有界闭集. 紧集的每个闭子集是紧的.

这是因为对于紧集 A 中的每个序列 $\{x_n\}$，若 $x_n\to x$，必有子列 $x_{n_k}\to x\in A$. 故 A 闭. 另一方面若 A 紧，$E\subset X$ 是闭的，则对于 $\{x_n\}\subset A$，有子列 $x'_{n_k}\to x$，E 闭，故 $x\in E$. 所以 E 紧.

定理 2 设 X 为度量空间，$A\subset X$，则下面两条件等价：

（1）A 是相对紧集.

（2）A 中任一无穷序列 $\{x_n\}$ 包含收敛子序列（极限点不必在 A 中）.

证明 1° 若 $\overline{A}$ 紧，$\{x_n\}\subset A\subset\overline{A}$，由定理 1，存在子序列 $\{x_{n_k}\}$，$x_{n_k}\to x\in\overline{A}\subset X$.

2° 反之，设 $\{x_n\}$ 是 $\overline{A}$ 中的无穷序列，构造 A 中的无穷序列 $\{y_n\}$，

$$y_n=\begin{cases}x_n, & 若x_n\in A.\\ x'_n, & 若x_n\in\overline{A}\setminus A, 取x'_n\in A, d(x'_n,x_n)<\dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

则 $\{y_n\}\subset A$. 由（2），存在子列 $\{y_{n_k}\}$，$y_{n_k}\to y\in X$. 显然 $y\in\overline{A}$ 并且

$$d(x_{n_k},y)\le d(x_{n_k},y_{n_k})+d(y_{n_k},y)\le\frac{1}{n_k}+d(y_{n_k},y)\to 0,$$

所以 $x_{n_k}\to y$. 由定理 1 知 $\overline{A}$ 紧，从而 A 相对紧.

定理 3 设 X 是度量空间，$A\subset X$，则下面两条件等价：

（1）A 是完全有界集.

（2）A 中任一无穷序列 $\{x_n\}$ 包含 Cauchy 子序列.

证明 1° 若 A 是完全有界的，$\{x_n\}\subset A$. 取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，则 A 有有限 $\dfrac{1}{2}$ 网，$\{x_n\}$ 是无限的，故至少有一个半径为 $\dfrac{1}{2}$ 的球包含无穷多个 x_n，记它们为 $\{x_{1i}\}$，显然 $d(x_{1i},x_{1j})<1$. $\{x_{1i}\}$ 作为 A 的子集同样是完全有界的. 现在取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2^2}$，$\{x_{1i}\}$ 有有限的 $\dfrac{1}{2^2}$ 网，其中之一包含 $\{x_{1i}\}$ 中无穷多个元，记为 $\{x_{2i}\}$，显然 $d(x_{2i},x_{2j})<\dfrac{1}{2}$，…. 如此下去，得到可数多个序列，每个序列

是前面一个的子序列．利用对角线方法选取$\{x_{nn}\}$，它是$\{x_n\}$的子序列，由我们的取法知道，$\{x_{nn}\}$是 Cauchy 序列．

2° 若A不是完全有界的，则存在$\varepsilon_0>0$，A不具有有限ε_0网．换句话说任取$x_1\in A$，$O(x_1,\varepsilon_0)\not\supset A$，故有$x_2\in A\setminus O(x_1,\varepsilon_0)$，又$\bigcup_{i=1}^{2}O(x_i,\varepsilon_0)\not\supset A$，从而有$x_3,\cdots$．显然$d(x_n,x_m)\geq\varepsilon_0\ (m\neq n)$，$\{x_n\}$不包含任何 Cauchy 子序列，矛盾．

推论 2 设X是度量空间，$A\subset X$．

（1）A是紧集则A必是相对紧的．

A是相对紧的则A必是完全有界的．

（2）若A是闭集，则A紧当且仅当A相对紧．

（3）若X完备，则A相对紧当且仅当A完全有界．

（4）整个空间X是紧的当且仅当X完备并且完全有界．

推论 3 设$A\subset\Phi^n$，则以下条件等价：

（1）A是有界集．

（2）A是完全有界集．

（3）A是相对紧集．

特别地，在有限维线性赋范空间中A是紧集当且仅当A是有界闭集．

证明 （3）$\Rightarrow$（2）$\Rightarrow$（1）是显然的．（1）$\Rightarrow$（3）根据 Bolzano-Weierstrass 定理得到．

定理 4 设X，Y是度量空间，其中X紧，$T:X\to Y$是连续映射，则

（1）$T(X)$是紧集．

（2）T在X上一致连续．即$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对于任何$x,x'\in X$，只要$d(x,x')<\delta$，则$d(T(x),T(x'))<\varepsilon$．

（3）若f是X上的实值连续函数，则f在A上可以达到上、下确界．

证明 1° 若$y_n\in T(X)$，不妨设$y_n=T(x_n)$，$x_n\in X$，$n\geq 1$．X紧，故存在$\{x_{n_k}\}$，$x_{n_k}\to x_0\in X$，记$y_0=T(x_0)$．T连续，故$y_{n_k}=T(x_{n_k})\to T(x_0)=y_0\in T(X)$．由定理 1，$T(X)$紧．

2° 若不然，则存在$\varepsilon_0>0$，$x_n,x_n'\in X$，$d(x_n,x_n')<\dfrac{1}{n}$，但$d(T(x_n),T(x_n'))\geq\varepsilon_0$．$A$紧，

故存在$\{x_{n_k}\}$，$x_{n_k}\to x_0\in X$．从而$x'_{n_k}\to x_0$，由T在x_0的连续性，

$$T(x_{n_k})\to T(x_0)，\quad T(x'_{n_k})\to T(x_0)．$$

$$d(T(x_{n_k}),T(x'_{n_k}))\le d(T(x_{n_k}),T(x_0))+d(T(x_0),T(x'_{n_k}))\to 0$$

这与$d(T(x_{n_k}),T(x'_{n_k}))\ge\varepsilon_0$矛盾．

3°　由 1°，$f(x)$在R中紧，故$f(x)$是有界集，记$a=\sup\limits_{x\in X}f(x)$．由上确界定义，存在$x_n\in X$，$f(x_n)\to a$．$X$紧，故$\{x_n\}$中有子列$\{x_{n_k}\}$，$x_{n_k}\to x_0\in X$，所以$f(x_{n_k})\to f(x_0)$，$f(x_0)=a$．对于下确界同样证明．

紧性在很多学科中都会用到，有时候知道某空间或其中的某个子集是紧或相对紧的是很重要的．

例 1　空间$C(\Omega)$中的相对紧集．

设(Ω,d)是紧度量空间，$C(\Omega)$是Ω上定义的标量值连续函数全体．定义

$$\|x\|=\sup_{t\in\Omega}|x(t)|，\qquad \forall x\in C(\Omega)．\tag{1}$$

容易验证，$\|x\|$有确定的意义（即有限实数），$\|\cdot\|$是$C(\Omega)$上的范数并且$C(\Omega)$是 Banach 空间．

$C(\Omega)$的子集K称为是等度连续的函数族，若$\forall\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$使得$\forall t_1,t_2\in\Omega$，$d(t_1,t_2)<\delta$，则

$$|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon，\qquad \forall x\in K．\tag{2}$$

定理 5（Arzela-Ascoli）　$K\subset C(\Omega)$是相对紧集当且仅当K是$C(\Omega)$中范数有界的等度连续函数族．

证明　充分性．由于$C(\Omega)$的完备性只须证明K完全有界．

$\forall\varepsilon>0$，由等度连续性，取$\delta>0$使得当$d(t,t')<\delta$时，$|x(t)-x(t')|<\dfrac{\varepsilon}{3}$．$\Omega$是紧空间，故有有限$\delta$网$t_1,\cdots,t_n$，使得$\forall t\in\Omega$，$\exists i$，$d(t,t_i)<\delta$．此时

$$|x(t)-x(t_i)|<\frac{\varepsilon}{3}．\tag{3}$$

记$\widetilde{K}=\{\widetilde{x}=(x(t_1),\cdots,x(t_n)):x(t)\in K\}$，$\widetilde{K}$是$\Phi^n$中的点集，并且对于每个$\widetilde{x}\in\widetilde{K}$，

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x(t_i)|^2} \le \sqrt{n}\max_{1\le i\le n}|x(t_i)| \le \sqrt{n}\sup_{x\in K}\sup_{t\in\Omega}|x(t)| < \infty$$

即 $\widetilde{K}$ 为 Φ^n 中的有界集，从而是完全有界集（推论 3）.

对于 ε，$\widetilde{K}$ 有有限 $\frac{\varepsilon}{3}$ 网 $\widetilde{x}_1,\cdots,\widetilde{x}_k$，我们证明，与 $\widetilde{x}_1,\cdots,\widetilde{x}_k$ 相应的函数 $x_1,\cdots,x_k$ 是 K 的 ε 网.

实际上，$\forall x\in K$，对应的 $\widetilde{x}=(x(t_1),\cdots,x(t_n))\in\widetilde{K}$，从而有 $\widetilde{x}_j=(x_j(t_1),\cdots,x_j(t_n))$ 使得

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_j(t_i)-x(t_i)|^2} < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{4}$$

此时

$$|x_j(t_i)-x(t_i)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad 1\le i\le n.$$

$\forall t\in\Omega$，取 t_i，使 $d(t,t_i)<\delta$，则由（3），（4），

$$|x(t)-x_j(t)| \le |x(t)-x(t_i)|+|x(t_i)-x_j(t_i)|+|x_j(t_i)-x_j(t)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

所以

$$\|x-x_j\| = \max_{t\in\Omega}|x(t)-x_j(t)| < \varepsilon,$$

即 $x\in O(x_j,\varepsilon)$．K 是完全有界的.

必要性．设 K 是相对紧集，则 K 是范数有界集.

为证明 K 等度连续，$\forall\varepsilon>0$，设 $x_1,\cdots,x_k$ 为 K 的 $\frac{\varepsilon}{3}$ 网，每个 x_i $(1\le i\le k)$ 在 Ω 上连续，从而一致连续．于是存在 $\delta>0$，当 $d(t,t')<\delta$ 时，

$$|x_i(t)-x_i(t')| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad 1\le i\le k.$$

对于每个 $x\in K$，

$$\begin{aligned}|x(t)-x(t')| &\le |x(t)-x_i(t)|+|x_i(t)-x_i(t')|+|x_i(t')-x(t')| \\ &< 2\|x-x_i\|+|x_i(t)-x_i(t')| \\ &< \frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

故得之.

思考题

1、 若函数族$|f_n(t)|$在紧集A上等度连续并且点点收敛，则$|f_n(t)|$在A上一致收敛.

2、 设$E \subset C[a,b]$，E有界且满足$\alpha(0<\alpha\le 1)$阶 Lipschitz 条件

$$|x(t_1)-x(t_2)|\le L|t_1-t_2|^{\alpha}，\quad t_1,t_2\in[a,b]，\quad \forall x\in E，$$

则E是$C[a,b]$中的相对紧集.