第 5 讲　不动点定理

教学目的：掌握压缩映象原理并应用于解各种算子方程的问题。

授课要点：

1、压缩映象与压缩映象原理。

2、利用压缩映象原理解微分方程、积分方程和代数方程组。

求解各种类型（代数，积分，微分）的方程时，首先遇到的是解的存在性和惟一性问题. 这类问题在泛函分析中即所谓不动点问题. 其中关于不动点的存在性往往是与空间的完备性直接有关的.

定义　设 X 是度量空间，$T: X \to X$ 是一个映射（不必线性），若存在 a，$0 \le a < 1$ 使得

$$d(Tx, Ty) \le a\, d(x, y), \quad \forall x, y \in X \qquad (1)$$

则称 T 是 X 上的一个压缩映射.

容易验证压缩映射在每一点是连续的.

若存在 $x_0 \in X$ 使得 $Tx_0 = x_0$，则称 x_0 是 T 的不动点.

定理 1　完备度量空间上的压缩映射具有惟一的不动点.

证 明　任取 $x_0 \in X$，则

$$Tx_0,\ T^2 x_0 = T(Tx_0),\ \cdots,\ T^n x_0 = T(T^{n-1} x_0)$$

可归纳地予以定义. 我们证明 $\{T^n x_0\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列.

实际上由压缩性，

$$d(T^{n+1}x_0, T^n x_0) \le a d(T^n x_0, T^{n-1} x_0) \le \cdots \le a^n d(Tx_0, x_0).$$

从而对于任何自然数 p，

$$\begin{aligned} d(T^{n+p}x_0, T^n x_0) &\le a^n d(T^p x_0, x_0) \\ &\le a^n (d(T^p x_0, T^{p-1} x_0) + \cdots + d(Tx_0, x_0)) \\ &\le a^n (a^{p-1} + a^{p-2} + \cdots + 1) d(Tx_0, x_0) \\ &\le \frac{a^n}{1-a} d(Tx_0, x_0) \qquad (2) \end{aligned}$$

x_0 与 Tx_0 是 X 中两个固定的点，由于 $0 \le a < 1$，不难知道 $\{T^n x_0\}$ 是 Cauchy 序列.

X 是完备的，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x_0 = \bar{x}$，$\bar{x} \in X$. 由 T 的连续性

$$T\bar{x}=T(\lim_{n\to\infty}T^{n}x_0)=\lim_{n\to\infty}T(T^{n}x_0)=\lim_{n\to\infty}T^{n+1}x_0=\bar{x}\ .$$

$\bar{x}$ 是 T 的不动点．这说明不动点是存在的．

若另有 $\bar{y}\in X$ ，$T\bar{y}=\bar{y}$ ，则仍由压缩性

$$d(\bar{x},\bar{y})=d(T\bar{x},T\bar{y})\le ad(\bar{x},\bar{y}),$$

此时必有 $d(\bar{x},\bar{y})=0$ ，从而 $\bar{x}=\bar{y}$ ．这说明不动点是惟一的．

定理得证．

注意在不等式（2）中令 $p\to\infty$ ，由于 $\lim_{p\to\infty}T^{n+p}x_0=\bar{x}$ ，可以得到

$$d(T^{n}x_0,\bar{x})\le\frac{a^{n}}{1-a}d(Tx_0,x_0)\ . \qquad (3)$$

此式给出了 x_0 经过 T 的 n 次迭代后到 $\bar{x}$ 的距离的估计．

命题　设 $T:X\to X$ 是 X 上的映射，若对于某个自然数 k ，T^{k} 有惟一不动点，则 T 以同一点为惟一不动点．

证明　设 $x_0\in X$ 是 T^{k} 的惟一不动点，$T^{k}x_0=x_0$ ，则 $Tx_0=T(T^{k}x_0)=T^{k}(Tx_0)$ ．这说明 Tx_0 是 T^{k} 的不动点．由惟一性知道 $Tx_0=x_0$ ．又 T 的每个不动点必是 T^{k} 的不动点，所以 T 的不动点是惟一的．

例 1　考虑具有初值条件的微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\ ,\quad y(x_0)=y_0 \qquad (4)$$

其中 $f(x,y)$ 是二元连续函数并且满足关于 y 的 Lipschitz 条件：

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|\ ,\quad \forall x\in[x_0,x_0+\delta]\ ,\quad -\infty<y_1,y_2<\infty\ .$$

则当 $\delta L<1$ 时，此微分方程存在惟一连续解．

实际上，若考虑映射 $T:C[a,b]\to C[a,b]$ （这里记 $a=x_0$ ，$b=x_0+\delta$ ），

$$(Ty)(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))\mathrm{d}t\ ,\quad x\in[a,b],\quad \forall y=y(x)\in C[a,b]\ , \qquad (5)$$

则 y 是方程（4）的解当且仅当 y 是 T 的不动点．由 Lipschitz 条件，按 $C[a,b]$ 中的范数有

$$\begin{aligned}d(Ty_1,Ty_2)&=\|Ty_1-Ty_2\|\\&=\max_{t\in[a,b]}\left|\int_{x_0}^{x}[f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))]\mathrm{d}t\right|\\&\le\max_{t\in[a,b]}\int_{x_0}^{x}L|y_1(t)-y_2(t)|\,\mathrm{d}t\\&\le L|x-x_0|\max_{t\in[a,b]}|y_1(t)-y_2(t)|\end{aligned}$$

$$\leq \delta L \| y_1 - y_2 \|$$

当$\delta L < 1$时T是压缩的，由于$C[a,b]$是完备的，定理 1 表明T有惟一不动点．从而方程（1）存在惟一连续解．

例 2　设$K(s,t)$是矩形$a \leq s$，$t \leq b$上的连续函数，$\sup\limits_{a \leq s,t \leq b} |K(s,t)| = M < \infty$．对于每个$\mu \in \Phi$，考虑 Volterra 型积分方程

$$x(t) = \mu \int_a^t K(t,\tau) x(\tau) \mathrm{d}\tau + \varphi(t), \tag{6}$$

其中$\varphi(t) \in C[a,b]$．我们证明此方程在$C[a,b]$中存在惟一解．

实际上，考虑映射$T: C[a,b] \to C[a,b]$，

$$(Tx)(t) = \mu \int_a^t K(t,\tau) x(\tau) \mathrm{d}\tau + \varphi(t), \quad \forall x \in C[a,b]$$

则T的不动点即是（6）的解。由于

$$\begin{aligned} |(Tx)(t) - (Ty)(t)| &= |\mu| \left| \int_a^t K(t,\tau)((x(\tau) - y(\tau)) \mathrm{d}\tau \right| \\ &\leq |\mu| M \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| |t-a| \\ &= |\mu| M (t-a) d(x,y) \end{aligned} \tag{7}$$

直接对于左端取上确界未必会得到T的压缩性, 所以需要考虑别的途径. 实际上对于（7）两端关于t再积分，归纳地，若

$$|(T^n x)(t) - (T^n y)(t)| \leq |\mu|^n M^n \frac{(t-a)^n}{n!} d(x,y),$$

则

$$\begin{aligned} |(T^{n+1} x)(t) - (T^{n+1} y)(t)| &= |\mu| \left| \int_a^t K(t,\tau)((T^n x)(\tau) - (T^n y)(\tau)) \mathrm{d}\tau \right| \\ &\leq |\mu|^{n+1} M^{n+1} \frac{1}{n!} \int_a^t (\tau - a)^n \mathrm{d}\tau d(x,y) \\ &= |\mu|^{n+1} M^{n+1} \frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!} d(x,y). \end{aligned}$$

由此得到对于任何自然数n，

$$\begin{aligned} d(T^n x, T^n y) &= \sup_{a \leq t \leq b} |(T^n x)(t) - (T^n y)(t)| \\ &\leq \frac{|\mu|^n M^n (b-a)^n}{n!} d(x,y). \end{aligned}$$

取n足够大，可使$\frac{|\mu|^n M^n (b-a)^n}{n!} < 1$，此时$T^n$成为$C[a,b]$上的压缩映射．$C[a,b]$完备，所以$T^n$有惟一不动点．再由命题 1，$T$有同一不动点．它即是方程（6）的解．

对于线性空间 X 上的一个算子 $T:X\to X$，算子方程 $Tx=y$ 的求解问题很容易变成一个不动点的存在问题．例如设

$$Vx=x+Tx-y,$$

则 V 的不动点即是 $Tx=y$ 的解．让我们给出一个很一般的例．

例 3　设 X 是 Banach 空间，U 是从 X 到 X 中的算子，若

$$\|Ux_1-Ux_2\|\le a\|x_1-x_2\|,\quad \forall x_1,x_2\in X.$$

其中 $0\le a<1$，则方程 $Ux=x+y$ 有惟一解．

实际上，如上面所述，令 $Vx=Ux-y$，则

$$\|Vx_1-Vx_2\|=\|Ux_1-Ux_2\|\le a\|x_1-x_2\|,\quad \forall x_1,x_2\in X.$$

即 V 是 X 上的压缩映射． X 完备，故存在 $\bar{x}\in X, V\bar{x}=\bar{x}$，从而 $\bar{x}=U\bar{x}-y$，$\bar{x}$ 是 $Ux=x+y$ 的惟一解．

在很多实际应用中，压缩映象的条件还是过于严格了. 为了解决这些问题提出了各种各样的别的条件，比如“非扩张的”， 甚至“扩张的”映射等. 另外随着学科的发展又提出了“随机的”和“集值的”映射等等, 它们也都有相应的不动点定理. 总之，至今有关“不动点定理”的问题已经发展成为内容十分丰富的体系，他们在解决理论和应用的许多问题中都提供了有力的工具，读者对此应有足够的重视.