第 4 讲　完备性与纲定理

> **教学目的**：掌握完备空间的概念，完备空间的基本性质并认识完备性在分析中的重要意义。
>
> **授课要点**：
>
> 1、　完备性的定义和常见空间的完备性。
>
> 2、　完备空间的基本性质。
>
> 3、　纲的概念及初步应用。
>
> 4、　完备化定理：任何度量空间都可以完备化。

在实数理论中我们知道著名的 Cauchy 准则，即实数序列是收敛的当且仅当它是满足 Cauchy 条件的．当我们把视线从实数域转到一般的度量空间时我们会提出类似的问题．度量空间也有序列的收敛概念，那么是否也有相应的 Cauchy 准则呢？实际上只须看一下有理数域 Q 的情况，其中的 Cauchy 序列不一定都收敛于 Q 中的元，所以 Cauchy 准则对于 Q 并不成立．造成这一现象的原因并不是序列的分析性质不好，而在于空间中的点“不够多”，以至于存在“孔洞”.

定义 1　设 (X,d) 是度量空间，$x_n \in X$，$n \geq 1$.

（1）若 $\lim\limits_{m,n\to\infty} d(x_m,x_n)=0$，称 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 序列.

（2）若 X 中的每个 Cauchy 序列 $\{x_n\}$ 是收敛序列，即 $\exists x \in X$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$，则称 X 是完备的.

由三角不等式容易得出每个收敛序列一定是 Cauchy 序列，反之却未必.

完备的线性赋范空间称为 Banach 空间，完备的内积空间称为 Hilbert 空间.

例 1　空间 $P[a,b]$ 不完备.

$P[a,b]$ 是区间 $[a,b]$ 上实（或复）系数多项式的全体．对于每个 $p \in P[a,b]$，定义

$$\|p\| = \max_{a\leq t\leq b} |p(t)|.$$

由定义可直接验证，$P[a,b]$ 是线性赋范空间，但 $P[a,b]$ 不是完备的．例如取

$$p_n(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \cdots + \frac{t^n}{n!},$$

显然 $p_n \in P[a,b]$．若记 $c = \max\{|a|,|b|\}$，则 $\forall m > n$，

$$\| p_m - p_n \| = \max_{a\le t\le b} | p_m(t) - p_n(t) |$$

$$= \max_{a\le t\le b}\left|\sum_{i=n+1}^{m}\frac{t^i}{i!}\right| \le \sum_{i=n+1}^{m}\max_{a\le t\le b}\left|\frac{t^i}{i!}\right|$$

$$\le \sum_{i=n+1}^{m}\frac{c^i}{i!} \to 0, \quad m \ge n \to \infty.$$

故 p_n 是 Cauchy 序列．

我们知道

$$\max_{a\le i\le b} | p_n(t) - e^t | = \max_{a\le i\le b}\left|\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{t^i}{i!}\right| \le \sum_{i=n+1}^{m}\frac{c^i}{i!} \to 0, n \to \infty.$$

但 $e^t \overline{\in} P[a,b]$．同时注意到，$P[a,b]$ 上的范数收敛相当于在 $[a,b]$ 上的一致收敛，从而点点收敛．于是极限函数是惟一的，p_n 不可能有其他极限，故 $P[a,b]$ 不完备．

例 2　$C[a,b]$ 完备．

设 $\{x_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中的 Cauchy 序列．$\forall \varepsilon > 0$，存在 n_0，当 $m,n \ge n_0$ 时，$\| x_m - x_n \| < \varepsilon$．此时 $\forall t \in [a,b]$，

$$| x_m(t) - x_n(t) | \le \| x_m - x_n \| < \varepsilon， \tag{1}$$

于是 $\{x_n(t)\}$ 是 Cauchy 数列．故 $\forall t \in [a,b]$ 有 $x_0(t)$ 使得

$$x_n(t) \to x_0(t).$$

在不等式（1）中固定 n，令 $m \to \infty$，则得到

$$| x_0(t) - x_n(t) | \le \varepsilon， \quad t \in [a,b]. \tag{2}$$

现在取 $n \ge n_0$，由 $x_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上的连续性，取 $\delta > 0$，使得 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时 $| x_n(t_1) - x_n(t_2) | < \varepsilon$，则

$$| x_0(t_1) - x_0(t_2) | \le | x_0(t_1) - x_n(t_1) | + | x_n(t_1) - x_n(t_2) | + | x_n(t_2) - x_0(t_2) | < 3\varepsilon.$$

故 x_0 连续，即 $x_0 \in C[a,b]$．不等式（2）中的不等式关于 $t \in [a,b]$ 是一致的，这说明

$$\| x_n - x_0 \| \le \varepsilon，$$

从而以 $C[a,b]$ 中的范数 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$．

$C[a,b]$ 是完备的．

例 3　L^p $(1 \le p < \infty)$ 完备．

设$\{f_n\}$是L^p中的 Cauchy 序列．$\forall \varepsilon > 0$，存在n_0，使得当$m,n \ge n_0$时

$$\| f_m - f_n \|_p^p = \int_\Omega | f_m(t) - f_n(t) |^p \mathrm{d}\mu < \varepsilon^p .$$

若$\sigma > 0$，令$E_{mn}(\sigma) = \{t, | f_m(t) - f_n(t) | \ge \sigma\}$，则

$$\sigma^p \mu(E_{mn}(\sigma)) \le \int_{E_\sigma} | f_m(t) - f_n(t) |^p \mathrm{d}\mu$$
$$\le \int_\Omega | f_m(t) - f_n(t) |^p \mathrm{d}\mu < \varepsilon^p .$$

于是f_n在依测度收敛意义下是 Cauchy 序列．由实变函数的知识，存在可测函数f，使得f_n依测度收敛于f．

根据 Riesz 定理，有子序列$\{f_{n_k}\}$ $a.e.$收敛于f．现在我们证明依照L^p中的范数$f_{n_k} \to f$．实际上，当$n_i, n_k \ge n_0$时

$$\| f_{n_i} - f_{n_k} \|_p^p < \varepsilon^p .$$

另一方面，固定n_k，当$n_i \to \infty$时，

$$| f_{n_i}(t) - f_{n_k}(t) |^p \to | f(t) - f_{n_k}(t) |^p, \quad a.e.$$

由 Fatou 引理，

$$\int_\Omega | f(t) - f_{n_k}(t) |^p \mathrm{d}\mu \le \overline{\lim_{n_i \to \infty}} \int_\Omega | f_{n_i}(t) - f_{n_k}(t) |^p \mathrm{d}\mu \le \varepsilon^p . \qquad (3)$$

故$f - f_{n_k} \in L^p$，L^p是线性空间，从而$f = (f - f_{n_k}) + f_{n_k} \in L^p$．

不等式（3）还说明$\| f - f_{n_k} \|_p \le \varepsilon \ (n_k \ge n_0)$．注意$\{f_n\}$是 Cauchy 序列，只要$n \ge n_0$，$n_k \ge n_0$，则

$$\| f_n - f \|_p \le \| f_n - f_{n_k} \|_p + \| f_{n_k} - f \|_p < 2\varepsilon .$$

故$\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$．

证毕．

L^p中序列的依范数收敛，通常称为p方平均收敛．由证明还可知道，p方平均收敛的序列必定依测度收敛，反之则未必．

验证度量空间的完备性通常都要从给定的 Cauchy 序列找出一个“目标元”（在例 2 中是x_n点点收敛的极限函数，在例 3 中是f_n的依测度收敛的极限函数），而后验证此“目标元”属于该空间，并且在空间度量意义下，该元是所给 Cauchy 序列的极限．

思考题

验证空间L^∞，l^p $(1 \le p \le \infty)$，c_0，c的完备性．

在数学分析中我们知道，仅在有理数域中考虑极限运算会有不可想象的困难，这就是要用实数域取代它的原因。 由此想见，较之一般的度量空间， 完备空间具有更为优良的性质．下面让我们考察这方面的问题．

定理 1 设 X 是完备度量空间， $F_n \subset X$ 是一列非空递缩闭集，即 $F_n \supset F_{n+1}$ $(n \ge 1)$ 并且 $\mathrm{diam} F_n \to 0$，则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \ne \varnothing$．

证明 取 $x_n \in F_n$，$n \ge 1$，由 $F_n \supset F_{n+1}$ 知道 $x_m \in F_n$，$\forall m \ge n$．从而 $d(x_m, x_n) \le \mathrm{diam} F_n \to 0$．这说明 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列．

X 是完备的，故有 $x \in X$， $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$． 已经知道 $x_m \in F_n$ $(m \ge n)$， 由于 F_n 是闭集，故有 $x \in F_n$ $(n \ge 1)$，或者 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$．

线性赋范空间 X 中的一个向量级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ 称为是可和（收敛）的，若存在 $x \in X$， 使得部分和序列 $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ 依 X 的范数收敛于 x， $s_n \to s$，此时记 $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$． $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ 称为绝对可和的，若 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \| x_i \| < \infty$． 与数值级数不同，一个绝对可和的向量级数可能不是可和的，见例 1．下面定理说明这个问题与空间的完备性有密切联系．

定理 2 设 X 是线性赋范空间， X 是完备的当且仅当其中任一绝对可和级数可和．

证明 若 X 完备， $x_i \in X$， $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \| x_i \| < \infty$． 设 $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$， 则

$$\| s_m - s_n \| = \| \sum_{i=n+1}^{m} x_i \| \le \sum_{i=n+1}^{m} \| x_i \| \to 0, \quad (m, n \to \infty)$$

于是 $\{s_n\}$ 是 Cauchy 序列．从而存在 $x \in X$， $s_n \to x$， 即 $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$．

反之，若 X 中任一绝对可知级数可和， $\{s_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列． $\forall k \ge 1$，取 n_k 是使 $\| s_m - s_{n_k} \| < \frac{1}{2^k}$ $(\forall m \ge n_k)$ 成立的自然数， 不妨设 n_k 是递增的． 令 $x_1 = s_{n_1}$， $x_k = s_{n_k} - s_{n_{k-1}}$ $(k \ge 2)$，则

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \| = \| s_{n_1} \| + \sum_{k=2}^{\infty} \| s_{n_k} - s_{n_{k-1}} \| \le \| s_{n_1} \| + 1 < \infty,$$

即级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ 绝对可和．由假设，存在 $x \in X$， 使得 $\sum\limits_{k=1}^{i} x_k = s_{n_i} \to x$． $\forall \varepsilon > 0$，存在 n_0，使得 $n_i \ge n_0$ 时， $\| s_{n_i} - x \| < \frac{\varepsilon}{2}$． 另一方面， $\{s_n\}$ 为 Cauchy 序列，只要 n_0 足够大，当 $n, n_i \ge n_0$ 时，

$\| s_{n_i} - s_n \| < \frac{\varepsilon}{2}$. 此时

$$\| s_n - x \| \le \| s_n - s_{n_i} \| + \| s_{n_i} - x \| < \varepsilon ,$$

即 $s_n \to x$， X 是完备的.

思考题

你能否建立一些关于向量级数收敛的比较判别法？试总结之。

为了叙述完备空间的另一个重要性质，让我们先来介绍稠密性和 Baire 纲的概念.

定义 2 设 X 是度量空间， $E \subset X$.

（1）称 E 在 X 中稠密，若 $\overline{E} \supset X$.

（2）称 E 在 X 中无处稠密，若 $(\overline{E})^0 = \varnothing$.

（3）称 E 是第一纲的，若 E 可以写成至多可数多个无处稠密集的并.

X 中不是第一纲的集合称为是第二纲的.

（4）称空间 X 具有 Baire 性质，若 X 中可数多个稠密开集之交仍在 X 中稠密.

例如，有理数的全体 Q 在整个实数域 R 中是稠密的. 而 Cantor 的三分点集 E 在 [0,1] 中是无处稠密的.

下面两个命题可以将这些抽象的概念“直观化”一些.

命题 1 设 X 是度量空间， $E \subset X$ ，则以下条件等价：

（1） E 在 X 中稠密.

（2）对于 X 中任一非空开集 U ， $E \bigcap U \neq \varnothing$.

（3）对于任何 $x \in X$ ，存在 $x_n \in X$ ，使得 $x_n \to x$.

证明 （1）$\Rightarrow$（2） 设 U 是 X 中的非空开集. 由于 $\overline{E} = E \bigcup E' \supset X$，要么有 $E \bigcap U \neq \varnothing$，此时结论为真. 要么 $E' \bigcap U \neq \varnothing$. 此时由 E 的性质（第二讲命题 4（3）)，存在 $x_n \in E$ ，$x_n \neq x$ ，$x_n \to x$. 显然必有某个 $x_n \in U$ ，所以也有 $E \bigcap U \neq \varnothing$.

（2）$\Rightarrow$（3） $\forall x \in X$ ，取 $U_n = O(x, r_n)$， $r_n \to 0$ ，由（2）中条件， $\exists x_n \in U_n \bigcap E$ ，于是 $x_n \to x$.（3）$\Rightarrow$（1）是明显的.

命题 2 设 X 是度量空间， $E \subset X$ ，则以下条件等价：

（1） E 在 X 中无处稠密.

（2） $\overline{E}$ 在 X 中无处稠密.

（3）对于 X 中任一非空开球 U ，存在非空开球 $V \subset U$ ，使得 $V \bigcap E = \varnothing$.

（4） $(\overline{E})^c$ 在 X 中稠密.

证明 （1）与（2）的等价性直接由定义得到.

（1）$\Rightarrow$（3） 若 E 在 X 中无处稠密，即 $(\overline{E})^0 = \varnothing$ ，则对于任何开球 U ， $U \setminus \overline{E} \neq \varnothing$. 注

意$U\setminus\overline{E}$是开集，从而存在开球$V\subset U\setminus\overline{E}$，使得$V\bigcap E=\varnothing$.

（3）⇒（1） 若$(\overline{E})^0\neq\varnothing$，取$U=(\overline{E})^0$，则对于任何开球$V\subset U$，$V\subset\overline{E}$，由命题1（1）⇒（2）的证明知$V\bigcap E\neq\varnothing$，此与（3）矛盾.

（1）⇒（4） 记$B=(\overline{E})^c$，若$\overline{B}\neq X$，则$\overline{E}=X\setminus B\supset X\setminus\overline{B}\neq\varnothing$. 后者是开集，故$(\overline{E})^0\neq\varnothing$，从而$E$不是无处稠密的. 矛盾.

（4）⇒（2） $(\overline{E})^c$在X中稠密，则$\overline{E}$不含内点，即$(\overline{E})^0=\varnothing$.

定理 3

（1）完备度量空间具有 Baire 性质.

（2）具有 Baire 性质的空间本身是第二纲集.

证明 1° 设X是完备的，B_i是X中一列稠密开集，只须证明对于X中任一开球U，$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}B_i\bigcap U\neq\varnothing$.

B_1在X中稠密，故$B_i\bigcap U\neq\varnothing$. 此时$\exists x_1\in X$，$r_1>0$，使得$O(x_1,r_1)\subset B_1\bigcap U$. 于是闭球$S\left(x_1,\frac{r_1}{2}\right)\subset B_1\bigcap U$.

B_2在X中稠密，故$B_2\bigcap O\left(x_1,\frac{r_1}{2}\right)\neq\varnothing$. 从而$\exists x_2\in X$和$r_2>0$ $\left(\text{不妨设}r_2<\frac{r_1}{2}\right)$，使得$O(x_2,r_2)\subset B_2\bigcap O\left(x_1,\frac{r_1}{2}\right)\subset B_2\subset U$，此时闭球$S\left(x_2,\frac{r_2}{2}\right)\subset S\left(x_1,\frac{r_1}{2}\right),\cdots$.

如此做下去，一般地得到闭球

$$S\left(x_n,\frac{r_n}{2}\right)\subset O(x_n,r_n)\subset B_n\bigcap U,\quad n\geq 1,$$

显然序列$S\left(x_n,\frac{r_n}{2}\right)$，$n\geq 1$满足定理1的条件，实际上，$S\left(x_n,\frac{r_n}{2}\right)\subset S\left(x_{n-1},\frac{r_{n-1}}{2}\right)$并且

$$\frac{r_n}{2}\leq\frac{r_{n-1}}{2^2}\leq\cdots\leq\frac{r_1}{2^n}\to 0.$$

X完备，所以$\exists x\in X$，

$$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}S\left(x_n,\frac{r_n}{2}\right)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}O(x_n,r_n)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\bigcap U$$

故$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n$在$X$中稠密.

2° 若$X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，其中$E_n$是无处稠密集，显然$X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\overline{E}_n$. 令$B_n=X\setminus\overline{E}_n$，则$B_n$是开集并且由命题2（4），$B_n$在$X$中稠密. 现在

$$\varnothing = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{E}_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n ,$$

这与 X 具有 Baire 性质矛盾，所以 X 只能是第二纲集.

定理证毕.

下面让我们介绍一些关于映射的记号和基本知识.

设 X，Y 是任意点集，T 是从 X 到 Y 中的映射（算子），$A \subset X$，$B \subset Y$，今后记

$$T(A) = \{y \in Y; y = Tx, \forall x \in A\},$$

$$T^{-1}(B) = \{x \in X; y = Tx, \forall y \in B\}.$$

称 $T(A)$ 是集合 A 的像，$T^{-1}(B)$ 是集合 B 的原像.

定义 3 设 X，Y 是两个度量空间，$T: X \to Y$ 是一个映射.

（1）称 T 是在 $x_0 \in X$ 连续的，若对于任何 $x_n \in X$，$x_n \to x_0$，则 $Tx_n \to Tx_0$.

（2）若 T 在 X 的每一点连续，称 T 在 X 上连续.

T 在 x_0 连续的定义也可以用邻域的说法来表述，即 T 在 x_0 连续当且仅当对于 Tx_0 的任一邻域 $O(Tx_0)$ 存在 x_0 的邻域 $O(x_0)$ 使得 $T(O(x_0)) \subset O(Tx_0)$. 甚至于可以用 $\varepsilon - \delta$ 语言来叙述连续性，它们彼此是等价的. 读者不妨作为练习直接验证之.

定理 4 设 X，Y 是度量空间，$T: X \to Y$ 是一映射.

（1）T 在 X 上连续当且仅当对于任一开集 $B \subset Y$，$T^{-1}(B)$ 是 X 中的开集.

（2）上面开集换为闭集结论仍成立.

证 明 分别以 $O(x)$，$O(Tx)$ 表示 x 在 X 中和 Tx 在 Y 中的邻域，它们是包含该点的任一开集.

1° 设 T 在 X 上连续，$B \subset Y$ 为开集. 对于任意的 $x \in T^{-1}(B)$，由于 $y = Tx \in B$，存在 $O(Tx) \subset B$. T 在 x 连续，从而有 $O(x)$，$T(O(x)) \subset O(Tx) \subset B$，于是 $O(x) \in T^{-1}(B)$，$T^{-1}(B)$ 为开集.

反之，若对于任意开集 $B \subset Y$，$T^{-1}(B)$ 开，则对于任意的 $x \in X$ 和 Tx 的邻域 $O(Tx)$，$O(x) = T^{-1}(O(Tx))$ 为开集. 显然 $x \in O(x)$，$T(O(x)) \subset O(Tx)$，故 T 在 x 连续，从而在 X 上连续.

2° 从等式 $T^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus T^{-1}(B)$ $(\forall B \subset Y)$ 即得之.

定义 4 设 X，Y 是线性空间，$T: X \to Y$ 是一映射.

（1）称 T 为线性映射或算子，若 $\forall x_1, x_2 \in X$，$\alpha, \beta \in \varPhi$，

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2\,.$$

（2）当 $Y=\Phi$ 时，（1）中的线性算子 T 称为 X 上的线性泛函．

关于映射（算子），以下事实应该注意：

1° 对于 $T:X\to Y$，我们记 $R(T)=T(X)$．则可以验证 $R(T)$ 是 Y 的线性子空间，称 $R(T)$ 是 T 的值空间．若 $R(T)=Y$，称 T 是到上的（满射）．若对于任何 $Tx_1,Tx_2\in R(T)$，由 $Tx_1=Tx_2$ 可推出 $x_1=x_2$，则称 T 是一一的（单射）．既是满射又是单射的映射又称为双射．

2° 若 T 是线性的，则 $T0=0$．记 $N(T)=\{x\in X;Tx=0\}$，容易验证 $N(T)$ 是 X 的线性子空间并且 T 是一一的当且仅当 $N(T)=\{0\}$．称 $N(T)$ 是 T 的 0 空间．

3° 对于线性算子 T，若 T 是一一映射，则对于每个 $y\in R(T)$，$T^{-1}y$ 是 X 中惟一的元素．此时称映射 $T^{-1}:R(T)\to X$，（其中 $Tx=y$ 时令 $T^{-1}y=x$）是 T 的逆映射．容易验证此时 T^{-1} 也是线性算子．

线性算子与线性泛函在代数、几何和经典分析中是经常遇到的, 现举例如下．

例 4　设 $X=\Phi^n$，$Y=\Phi^m$．对于每个 $m\times n$ 阶矩阵 $A=(a_{ij})$，定义

$$y_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i\,,\qquad j=1,\cdots,m \tag{4}$$

容易验证 $T:X\to Y$，$T(x_1,\cdots,x_n)=(y_1,\cdots,y_m)$ 是线性算子．若用矩阵表示，则上式即

$$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}, & \cdots, & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1}, & \cdots, & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

例 5　在 $C[a,b]$ 上定义

$$(Tx)(t)=\int_a^t x(s)\mathrm{d}s\,,\quad t\in[a,b]\,;\qquad S(x)=\int_a^b x(s)\mathrm{d}s\,;$$

则 T，S 分别是 $C[a,b]$ 上的线性算子与线性泛函．

例 6　在 $C^{(k)}(\Omega)$ 上定义的微分算子

$$(Du)(t)=\sum_{|\alpha|\le k}C_\alpha(t)\frac{\partial^\alpha u(t)}{\partial t^\alpha}\ \text{（这里}\ \frac{\partial^0 u(t)}{\partial t^0}=u\,,\ C_\alpha(t)\ \text{在}\ \Omega\ \text{上连续）}$$

都是线性算子．

现在让我们回到本节开头所说的问题．一个度量空间可能不是完备的，那么是否可以补充某些元素使之成为完备空间呢？我们将证明这样的完备化定理是成立的．为此需要下面概念．

定义 5　（1）设 X，Y 是度量空间，称 X 与 Y 彼此同构，若存在一一的到上的映射

$T: X \to Y$ 使得 T 与 T^{-1} 均连续．若 T 是到上的并且 $\forall x_1, x_2 \in X$，$d(Tx_1, Tx_2) = d(x, y)$，则称 T 是等距同构．

（2）若 X，Y 是线性赋范空间，称 X 与 Y 同构，若存在一一的到上的线性映射，$T: X \to Y$ 使得 T 与 T^{-1} 都连续．若 T 到上并且 $\forall x \in X$，$\|Tx\| = \|x\|$，则称 X，Y 等距同构．

容易验证一个到上的等距同构映射 T 一定是双方连续的，因此是同构映射．此外等距同构的两个空间除了表示它们的元素的符号不同之外是无法区分的，因此可以看成同一个空间．下面仅对于线性赋范空间证明完备化定理．实际上对于一般度量空间，结论仍成立。

定理 5　设 X 是线性赋范空间，则存在 Banach 空间 $\widetilde{X}$ 使得 X 与 $\widetilde{X}$ 的一个稠密子空间等距同构．在等距同构意义下，$\widetilde{X}$ 是包含 X 的最小完备空间，从而是唯一的．

称 $\widetilde{X}$ 是 X 的完备化空间．

证明　记 X 中的 Cauchy 序列全体为 E．称 X 中的序列 (x_n) 是 0 序列，若 $x_n \to 0$．称两个序列 (x_n)，(y_n) 是等价的，记为 $(x_n) \sim (y_n)$，若 $x_n - y_n \to 0$．直接验证可知关系“$\sim$”满足自反性，对称性，传递性，因此是 E 上的等价关系（见附表）．以 $\widetilde{X} = E/\sim$ 记如此的等价类的全体．我们首先验证 $\widetilde{X}$ 是线性赋范空间．

将 $\widetilde{X}$ 中的元记为 $\widetilde{\xi}$，$\widetilde{\eta}$，定义

$$\widetilde{\xi + \eta} = \widetilde{\xi} + \widetilde{\eta}, \quad \widetilde{\alpha\xi} = \alpha\widetilde{\xi}, \quad \forall \alpha \in \Phi \tag{5}$$

这种定义是合理的．实际上若 $(x_{1n}), (x_{2n}) \in \widetilde{\xi}$，$(y_{1n}), (y_{2n}) \in \widetilde{\eta}$，则

$$\|(x_{1n} + y_{1n}) - (x_{2n} + y_{2n})\| \le \|x_{1n} - x_{2n}\| + \|y_{1n} - y_{2n}\| \to 0$$

所以 $(x_{1n} + y_{1n})$ 与 $(x_{2n} + y_{2n})$ 属于同一等价类，这说明 $\widetilde{\xi + \eta}$ 不会有歧意出现．同样地，数乘也是合理的．例行的验证表明在此运算下，$\widetilde{X}$ 是线性空间．

$\forall \widetilde{\xi} \in \widetilde{X}$，定义

$$\|\widetilde{\xi}\| = \lim_{n \to \infty} \|x_n\|, \quad \forall \widetilde{\xi} = (x_n) \in \widetilde{X}.$$

这里 $\|\widetilde{\xi}\|$ 也不会有歧意．因为若 $(x_{1n}), (x_{2n}) \in \widetilde{\xi}$，则 $x_{1n} - x_{2n} \to 0$，于是 $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_{1n}\| = \lim\limits_{n \to \infty} \|x_{2n}\|$．

为证 $\|\widetilde{\xi}\|$ 是 $\widetilde{X}$ 上的范数，注意若 $\|\widetilde{\xi}\| = 0$，即 $x_n \to 0$，这说明 $\widetilde{\xi}$ 是 $\widetilde{X}$ 中的 0 元．现在若 $\widetilde{\xi} = (x_n)$，$\widetilde{\eta} = (y_n)$，则

$$\|\widetilde{\xi} + \widetilde{\eta}\| = \|\widetilde{\xi + \eta}\| = \lim_{n \to \infty} \|x_n + y_n\| \le \lim_{n \to \infty} \|x_n\| + \lim_{n \to \infty} \|y_n\| = \|\widetilde{\xi}\| + \|\widetilde{\eta}\|$$

$$\|\alpha\tilde{\xi}\| = \|\widetilde{\alpha\xi}\| = \lim_{n\to\infty}\|\alpha x_n\| = |\alpha|\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = |\alpha|\|\tilde{\xi}\|.$$

故考虑 X 中的特殊序列 $(x,x,\cdots)$．记它所在的等价类为 $\tilde{x}$．其全体记为 $\tilde{X}_0$，容易知道 $\tilde{X}_0$ 是 $\tilde{X}$ 的线性子空间．我们证明 X 与 $\tilde{X}_0$ 等距同构，$\tilde{X}_0$ 在 $\tilde{X}$ 中稠密．实际上定义

$$T: X \to \tilde{X}_0,\quad x \mapsto \tilde{x},\ \text{其中}\ \tilde{x} = (x,x,\cdots),$$

则 T 是一一的，到上的并且

$$\|Tx\| = \|\tilde{x}\| = \lim_{n\to\infty}\|x\| = \|x\|,\quad \forall x \in X.$$

所以 T 是等距的映射．$\forall \tilde{\xi} \in \tilde{X}$，不妨设 $\tilde{\xi} = (x_n)$，其中 $x_n \in X$．对于每个 n，记 $\tilde{x}_n = (x_n, x_n, \cdots)$，则 $\tilde{x}_n \in \tilde{X}_0$，由于 (x_n) 是 Cauchy 序列所以 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists n_0$ 使得 $k,n \ge n_0$ 时 $\|x_k - x_n\| < \varepsilon$．从而

$$\|\tilde{\xi} - \tilde{x}_k\| = \lim_{n\to\infty}\|x_k - x_n\| \le \varepsilon\ \|,\quad k \ge n_0 \tag{6}$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}\tilde{x}_k = \tilde{\xi}$．

最后证明 $\tilde{X}$ 是完备的．设 $\tilde{\xi}_k = (x_{kn})$ 是 Cauchy 序列，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists k_0$，当 $k, k' \ge k_0$ 时，

$$\|\tilde{\xi}_k - \tilde{\xi}_{k'}\| = \lim_{k\to\infty}\|x_{kn} - x_{k'n}\| < \varepsilon.$$

对于每个 $\tilde{\xi}_k$，由以上所证，存在 $\tilde{x}_k = (x_k, x_k, \cdots) \in \tilde{X}_0$ 使得

$$\|\tilde{\xi}_k - \tilde{x}_k\| = \lim_{n\to\infty}\|x_{kn} - x_k\| < \frac{1}{k},\quad \forall k \ge 1. \tag{7}$$

令 $\tilde{\xi} = (x_1, x_2, \cdots)$，由（7），当 n 足够大时

$$\|x_k - x_{k'}\| \le \|x_k - x_{kn}\| + \|x_{kn} - x_{k'n}\| + \|x_{k'n} - x_{k'}\| < \frac{1}{k} + \|x_{kn} - x_{k'n}\| + \frac{1}{k'}$$

所以 k，k' 足够大时，$\|x_k - x_{k'}\|$ 可任意小，于是 (x_k) 是 Cauchy 序列，$\tilde{\xi} \in \tilde{X}$．现在由（6），（7）得到

$$\lim_{k\to\infty}\|\tilde{\xi}_k - \tilde{\xi}\| \le \lim_{k\to\infty}\|\tilde{\xi}_k - \tilde{x}_k\| + \lim_{k\to\infty}\|\tilde{x}_k - \tilde{\xi}\| = 0.$$

总之，$\tilde{X}$ 是 X 的完备化空间．

若 $\tilde{X}'$ 是包含 X 的另一完备空间，X 与 $\tilde{X}'$ 的子空间等距同构，则 $\forall \tilde{\xi} \in \tilde{X}$，不妨设 $\tilde{x}_n \in \tilde{X}_0$ 使得 $\tilde{x}_n \to \tilde{\xi}$．此时 $x_n \in X$ 从而 $\tilde{x}_n \in \tilde{X}'$．于是由 $\tilde{X}'$ 的完备性，必有 $\tilde{\xi}' \in \tilde{X}'$ 使得

$\widetilde{x}_n \to \widetilde{\xi}'$．定义$\varphi: \widetilde{X} \to \widetilde{X}', \widetilde{\xi} \mapsto \widetilde{\xi}'$，则

$$\|\varphi(\widetilde{\xi})\| = \|\widetilde{\xi}'\| = \lim_{n\to\infty}\|\widetilde{x}_n\| = \|\widetilde{\xi}\|，\ \forall \widetilde{\xi} \in \widetilde{X}$$

所以φ是$\widetilde{X}$到$\widetilde{X}'$的子空间的等距同构．于是$\widetilde{X} \subset \widetilde{X}'$，$\widetilde{X}$是最小的．

定理证毕．

实际上每个内积空间也有完备化定理，内积空间的完备化空间仍然是保持内积不变的。

要验证一个空间$\widetilde{X}$是另一个空间X的完备化空间，只需检验（1），$X \subset \widetilde{X}$，此时要特别注意二者的度量或范数是一致的；（2），$\widetilde{X}$是完备空间；（3），X在$\widetilde{X}$中稠密．

前面我们已举出例子，$C[a,b]$与$L_p(1 \le p \le \infty)$是 Banach 空间，实际上$l_p(1 \le p \le \infty)$，c，c_0，$V_0[a,b]$都是 Banach 空间．另外第 3 讲例 9 中的空间$\widetilde{H}^{m,p}(\Omega)$依其范数一般不是完备的，它的完备化空间记为$H^{m,p}(\Omega)$，称为 Sobolev 空间．一般地，Sobolev 空间是建立在广义函数空间之上的，这里不再引述了．

思考题

1、 验证本讲例 1 中$P[a,b]$的完备化空间是$C[a,b]$．

2、 考虑下述空间

$$X = \left\{ x \in C[a,b]; \|x\| = \int_a^b |x(t)|\,dt \right\},$$

X不是完备的．根据 Lyzin 定理证明，X的完备化空间是$L_1[a,b]$．