第 3 讲　赋范空间的例

教学目的：通过实际例子认识多种形式的赋范空间，了解根据需要定义适当范数是现代数学中常用的和基本的方法。

授课要点：

1、　几个常用的经典空间范数的构造方式。

2、　L^p 与 l^p $(1\le p<\infty)$ 空间的 Holder，Minkowski 不等式。

在§1 中我们已经举出过一些赋范空间的例子．在泛函分析中有一些很早以前就受到人们重视并且被事实证明是十分重要的赋范空间，例如空间 L^p，l^p $(1\le p<\infty)$，这里将扼要加以介绍．在实变函数论中，我们还接触到过有界变差函数类，绝对连续函数类，满足 Lipschitz 条件的函数类以及有号测度类等等．这些函数类或测度类可以应用适当方式使之成为赋范空间．此外我们还将介绍一些在其他学科中用到的空间．

例 1　空间 $L^p(\mu)$ $(1\le p<\infty)$．

设 (Ω,Σ,μ) 是正测度空间，$\mu(\Omega)$ 有限或无穷．$L^p(\mu)=L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$ 是使得 $\int_\Omega |f(t)|^p\,\mathrm{d}\mu<\infty$ 的可测函数全体，并且将 $a.e.$ 相等的函数视为同一元．若 $\Omega=[a,b]$，μ 是 Ω 上的 Lebesque 测度，则记 $L^p=L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$．

1°　$L^p(\mu)$ 是线性空间．

若 $f,g\in L^p(\mu)$，即 $\int_\Omega |f(t)|^p\,\mathrm{d}\mu<\infty$，$\int_\Omega |g(t)|^p\,\mathrm{d}\mu<\infty$，则对于几乎所有的 $t\in\Omega$，

$$\left|f(t)+g(t)\right|^p\le(2\max\{\left|f(t)\right|,\left|g(t)\right|\})^p\le 2^p(\left|f(t)\right|^p+\left|g(t)\right|^p)$$

于是

$$\int_\Omega |f(t)+g(t)|^p\,\mathrm{d}\mu<\infty,$$

即 $f+g\in L^p(\mu)$．此外，显然 $\alpha f\in L^p(\mu)$，故 $L^p(\mu)$ 是线性空间．

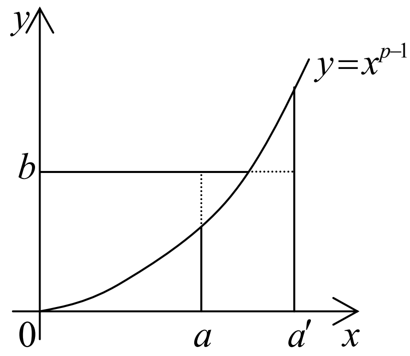
2°　设 $p>1$，$p^{-1}+q^{-1}=1$，若 $f\in L^p(\mu)$，$g\in L^q(\mu)$，我们证明

$$\int_\Omega |f(t)g(t)|^p\,\mathrm{d}\mu\le\left(\int_\Omega |f(t)|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |g(t)|^q\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}\qquad(1)$$

成立。称此式为 Hölder 不等式，称 p，q 为一对共轭数．

我们从 Young 不等式开始，设 $a,b>0$，则

$$ab \le A+B=\int_0^a x^{p-1}\mathrm{d}x+\int_0^b y^{q-1}\mathrm{d}y=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}. \qquad (2)$$



图

现在设

$$\| f\|_p=\left(\int_\Omega | f(t)|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}>0,$$

$$\| g\|_q=\left(\int_\Omega | g(t)|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}>0,$$

（在$\| f\|_p$与$\| g\|_q$至少一个为 0 的情况下，Hölder 不等式的成立是显然的）．作函数

$$a(t)=\frac{f(t)}{\| f\|_p}, \quad b(t)=\frac{g(t)}{\| g\|_q},$$

利用 Young 不等式得到

$$| a(t)b(t)|\le\frac{| a(t)|^p}{p}+\frac{| b(t)|^q}{q}.$$

从而

$$\int_\Omega | a(t)b(t)|\,\mathrm{d}\mu\le\frac{1}{p}\int_\Omega | a(t)|^p \,\mathrm{d}\mu+\frac{1}{q}\int_\Omega | b(t)|^q \,\mathrm{d}\mu$$

$$=\frac{1}{p}\int_\Omega\frac{| f(t)|^p}{\| f\|_p^p}\mathrm{d}\mu+\frac{1}{q}\int_\Omega\frac{| g(t)|^q}{\| g\|_q^q}\mathrm{d}\mu$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

换回到函数f，g，则知（1）成立．

3° 设$p\ge 1$，$f,g\in L^p(\mu)$，则 Minkowski 不等式成立

$$\| f+g\|_p\le\| f\|_p+\| g\|_p. \qquad (3)$$

实际上，当$p=1$时，

$$\| f+g\|_1=\int_\Omega | f(t)+g(t)|\,\mathrm{d}\mu$$

$$\le\int_\Omega | f(t)|\,\mathrm{d}\mu+\int_\Omega | g(t)|\,\mathrm{d}\mu=\| f\|_1+\| g\|_1.$$

现设$p>1$．当$f,g\in L^p(\mu)$时，$f+g\in L^p(\mu)$，此时$| f+g|^{\frac{p}{q}}\in L^q(\mu)$．由 Hölder 不等式

$$\int_\Omega | f|\,| f+g|^{\frac{p}{q}}\,\mathrm{d}\mu\le\| f\|_p\,\|\,| f+g|^{\frac{p}{q}}\|_q,$$

$$\int_{\Omega}|g||f+g|^{\frac{p}{q}}\,\mathrm{d}\mu \le \|g\|_p \||f+g|^{\frac{p}{q}}\|_q,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}|f+g|^p\,\mathrm{d}\mu &= \int_{\Omega}|f+g||f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu \\ &\le \int_{\Omega}|f||f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu + \int_{\Omega}|g||f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_{\Omega}|f||f+g|^{\frac{p}{q}}\,\mathrm{d}\mu + \int_{\Omega}|g||f+g|^{\frac{p}{q}}\,\mathrm{d}\mu \\ &\le \|f\|_p \||f+g|^{\frac{p}{q}}\|_q + \|g\|_p \||f+g|^{\frac{p}{q}}\|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p)\left(\int_{\Omega}|f+g|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

由此式得出

$$\|f+g\|_p = \left(\int_{\Omega}|f+g|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1-\frac{1}{q}} \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

4° 当 $p \ge 1$ 时，以 $\|f\|_p$ 为范数，$L^p(\mu)$ 成为线性赋范空间.

实际上，$\|f\|_p \ge 0$．若 $\|f\|_p = 0$，则 $f(t)=0$，$a.e.$，将 $a.e.$ 相等的函数视为同一元，即 $f=0$．显然 $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$ 成立。再由 3° 三角不等式成立。所以 $\|f\|_p$ 是 $L^p(\mu)$ 上的范数.

5° 当 $p=2$ 时，定义

$$(f,g) = \int_{\Omega} f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}\mu,\quad f,g \in L^2.$$

则 $(\cdot,\cdot)$ 是 $L^2(\mu)$ 上的内积，此时 $L^2(\mu)$ 成为内积空间.

值得注意的是 Minkowski 不等式中等号成立的条件. 不妨设 f，g 均不为 0 元，由于 Young 不等式中等号成立当且仅当 $b=\varphi(a)$，故 Hölder 不等式中等号成立当且仅当 $|g(t)| = k|f(t)|^{\frac{p}{q}}$，$a.e.$，其中 $k>0$ 为常数. 在证明 Minkowski 不等式时用到函数 $|f|$ 与 $|f+g|^{\frac{p}{q}}$ 以及 $|g|$ 与 $|f+g|^{\frac{p}{q}}$，故等号成立当且仅当 $|f+g|^{\frac{p}{q}} = k_1|f|^{\frac{p}{q}}$，$|f+g|^{\frac{p}{q}} = k_2|g|^{\frac{p}{q}}$，$a.e.$. 此时必有 $f(t) = cg(t)$，$a.e.$ 其中 c 为非负常数.

例 2 空间 $L^\infty(\mu)$.

仍设 (Ω,Σ,μ) 为测度空间，记 $L^\infty(\mu)$ 是在 Ω 上与一个有界函数几乎处处相等的可测函数全体，称此种函数为本性有界可测函数. 若 $\Omega=[a,b]$，μ 为 Ω 上的 Lebesque 测度，则记 $L^\infty = L^\infty[a,b]$.

1° $L^\infty(\mu)$ 是线性空间. 例如，若 f 在 $\Omega \setminus E_1$ 上有界，g 在 $\Omega \setminus E_2$ 上有界，$\mu(E_1)=\mu(E_2)=0$. 则 αf 与 $f+g$ 分别在 $\Omega \setminus E_1$ 与 $\Omega \setminus (E_1 \cup E_2)$ 上有界. $\mu(E_1 \cup E_2)=0$，故

$\alpha f, f+g\in L^{\infty}(\mu)$，$L^{\infty}(\mu)$ 是线性空间.

2° 对于任意的 $f\in L^{\infty}$，定义

$$\|f\|_{\infty}=\inf_{\substack{E\subset\Omega\\ \mu(E)=0}}\sup_{t\in\Omega\setminus E}|f(t)|. \tag{4}$$

$\|f\|_{\infty}$ 称为 f 的本性最大模或本性上确界．有时记

$$\|f\|_{\infty}=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\Omega}|f(t)|.$$

我们证明，将 Ω 上 $a.e.$ 相等的函数视为同一元，则 $\|\cdot\|_{\infty}$ 是 $L^{\infty}(\mu)$ 上的范数.

实际上对于每个 $f\in L^{\infty}(\mu)$，存在 $E_0\subset\Omega$，$\mu(E_0)=0$ 使得 $\|f\|_{\infty}=\sup\limits_{t\in\Omega\setminus E_0}|f(t)|$．换句话说，$\|f\|_{\infty}$ 可以在某个与 Ω 几乎相等的集合上达到．为此，取 $E_n\subset\Omega$ 使 $\mu(E_n)=0$，

$$\sup_{t\in\Omega\setminus E_0}|f(t)|\leq\|f\|_{\infty}+\frac{1}{n}.$$

记 $E_0=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，则一方面 $\mu(E_0)=0$，故由 $\|f\|_{\infty}$ 的定义

$$\sup_{t\in\Omega\setminus E_0}|f(t)|\geq\|f\|_{\infty}.$$

另一方面

$$\sup_{t\in\Omega\setminus E_0}|f(t)|\leq\sup_{t\in\Omega\setminus E_n}|f(t)|\leq\|f\|_{\infty}+\frac{1}{n}.$$

E_0 与 n 无关，故 $\sup\limits_{t\in\Omega\setminus E_0}|f(t)|\leq\|f\|_{\infty}$．于是

$$\|f\|_{\infty}=\sup_{t\in\Omega\setminus E_0}|f(t)|.$$

现在验证 $\|\cdot\|_{\infty}$ 是 $L^{\infty}(\mu)$ 上的范数.

（1）显然 $\|f\|_{\infty}\geq 0$．若 $\|f\|_{\infty}=0$，则 $\exists E_0\subset\Omega$，$\mu(E_0)=0$ 使得在 $\Omega\setminus E_0$ 上，$|f(t)|=0$，即 $f(t)=0$，$a.e.$ 将 $a.e.$ 为 0 的函数视为 0 元，则 $f=0$.

（2）显然 $\|\alpha f\|_{\infty}=|\alpha|\,\|f\|_{\infty}$.

（3）设 $f,g\in L^{\infty}(\mu)$，$E_1,E_2\subset\Omega$，$\mu(E_1)=\mu(E_2)=0$ 并且 f，g 分别在 $\Omega\setminus E_1$，$\Omega\setminus E_2$ 上达到本性最大模，则

$$\begin{aligned}\|f\|_{\infty}+\|g\|_{\infty}&=\sup_{t\in\Omega\setminus E_1}|f(t)|+\sup_{t\in\Omega\setminus E_2}|g(t)|\\&\geq\sup_{t\in\Omega\setminus(E_1\cup E_2)}|f(t)|+\sup_{t\in\Omega\setminus(E_1\cup E_2)}|g(t)|\\&\geq\sup_{t\in\Omega\setminus(E_1\cup E_2)}|f(t)+g(t)|\end{aligned}$$

$$\geq \| f+g \|_{\infty}.$$

3° 将 $a.e.$ 相等的函数视为同一元，$L^{\infty}(\mu)$ 依范数 $\| f \|_{\infty}$ 成为线性赋范空间.

4° 若 $f \in L^{1}(\mu)$，$g \in L^{\infty}(\mu)$，容易验证有

$$\left| \int_{\Omega} fg \mathrm{d}\mu \right| \leq \| f \|_{1} \| g \|_{\infty}. \tag{5}$$

例 3 空间 l^{p} $(1 \leq p \leq \infty)$.

考虑无穷序列空间中的元，l^{p} $(1 \leq p < \infty)$ 是使 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p} < \infty$ 的元素全体．l^{∞} 是使 $\sup_{n \geq 1} |x_n| < \infty$ 的元素全体．定义

$$\| x \|_{p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$\| x \|_{\infty} = \sup_{n} |x_n|. \tag{6}$$

则 l^{p} 是线性赋范空间.

实际上当 $1 < p < \infty$ 时，利用 Young 不等式（2）可以得出 Hölder 不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^{q} \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{7}$$

其中 $x = (x_n) \in l^{p}$，$y = (y_n) \in l^{q}$，并且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$．然后可以证明当 $1 \leq p < \infty$ 时，Minkowski 不等式成立

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^{p} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^{p} \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{8}$$

总之，对于 $1 \leq p \leq \infty$，$\| \cdot \|_{p}$ 是 l^{p} 上的范数.

特别地，当 $p = 2$ 时，若规定

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n, \qquad \forall x, y \in l^{2},$$

则 $(\cdot, \cdot)$ 是 l^{2} 上的内积，l^{2} 是内积空间.

空间 l^{p} 可以看成 L^{p} 的特殊情况．取 $\Omega = N$（全体正整数），Σ 由 N 的全体子集构成，对于每个 $E \in \Sigma$，$\mu(E)$ 是 E 中元素的个数．此时 (N, Σ, μ) 是测度空间，$L^{p}(\mu) = l^{p}$.

思考题

1、证明当 $\mu(\Omega) < \infty$ 时，若 $1 \leq p \leq q \leq \infty$，则 $L^{\infty} \subset L^{q} \subset L^{p} \subset L^{1}$.

但当 $\mu(\Omega)=\infty$ 时，L^p 与 L^q 互不包含.

2、对于 $1\le p\le q\le\infty$，证明 $l^1\subset l^q\subset l^p\subset l^\infty$.

3、证明 $\|f\|_\infty=\inf\{C>0;\mu\{f>C\}=0\}=\sup\{C>0;\mu\{f>C\}>0\}$

例 4 空间 c 与 c_0.

用 c 表示收敛的标量序列的全体，即

$$c=\{x=(x_n);\quad x_n\in\Phi,\quad \lim_{n\to\infty}x_n\text{存在}\}.$$

定义

$$\|x\|=\sup_{n\ge1}|x_n|,\quad \forall x=(x_n)\in c,$$

则 c 是线性赋范空间.

c_0 是收敛于 0 的标量序列全体，即

$$c_0=\{x=(x_n);\quad x_n\in\Phi,\quad \lim_{n\to\infty}x_n=0\},$$

c_0 上的范数与 c 中的范数相同，c_0 也是线性赋范空间. 从而 c_0 是 c 的线性子空间. 另外 c 又可以看成 l^∞ 的线性子空间.

例 5 空间 $V[a,b]$ 与 $V_0[a,b]$.

$V[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数全体，对于每个 $f\in V[a,b]$，定义

$$\|f\|=|f(a)|+\overset{b}{\underset{a}{V}}(f). \tag{9}$$

其中 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的全变差

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\sup_{\pi}\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|,$$

这里 π 代表 $[a,b]$ 的任一分划 $a=a_1<b_1\le\cdots\le a_n<b_n=b$.

$V[a,b]$ 按函数空间的运算是线性空间，我们验证它是赋范空间. 实际上，

1° 显然 $\|f\|\ge0$. 若 $\|f\|=0$，则 $f(a)=0$，$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=0$. 此时 $\sup\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|=0$，其中上确界是对任一组分划而取的. 故 $\forall t\in[a,b]$，$f(t)=f(a)=0$，即 $f=0$.

2° 显然 $\|\alpha f\|=|\alpha|\|f\|$.

3° 对于任一组分点，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|(f+g)(b_i)-(f+g)(a_i)|&\le\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|+\sum_{i=1}^{n}|g(b_i)-g(a_i)|\\&\le\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{a}{V}}(g).\end{aligned}$$

关于所有分划取上确界得到

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f+g) \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{V}}(g).$$

又

$$|(f+g)(a)| \le |f(a)| + |g(a)|,$$

所以

$$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|.$$

特别地，记 $V_0[a,b] = \{f \in V[a,b]; f(a)=0, f\text{在}(a,b)\text{中右连续}\}$，则 $V_0[a,b]$ 是 $V[a,b]$ 的线性子空间，$V_0[a,b]$ 上的范数是

$$\|f\| = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

例 6 设 (Ω, Σ) 是可测空间，其中 Ω 是某个集合，Σ 是由 Ω 的子集构成的 σ 代数. 设 M 是定义在 Σ 上的实值（不必非负）或复值有界变差测度的全体. 当 $u, v \in M$，$\alpha \in \Phi$ 时，定义

$$(u+v)(A) = u(A) + v(A), \quad (\alpha u)(A) = \alpha u(A), \quad \forall A \in \Sigma,$$

则 M 是线性空间. 若以全变差

$$\|u\| = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)|, \qquad \forall u \in M$$

作为 M 上的范数，这里 $\pi = \{A_1, \cdots, A_n\}$ 是 Ω 到 Σ 的一个分划，其中每个 $A_i \in \Sigma$，上确界是关于所有如此的 π 而取的. 则 M 是赋范空间.

例 7 设 Ω 是 R^n 中的一个区域，$0 < \alpha \le 1$，称函数 $f: \Omega \to R$ 满足 Lipschitz 条件，若存在 $L > 0$ 使得

$$|f(x) - f(y)| \le L|x-y|^{\alpha}, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

记此种函数的全体为 $C^{\alpha}(\Omega)$. 容易验证 $C^{\alpha}(\Omega)$ 是线性空间. 若以 $\|f\|_{Lipa}$ 记满足上述不等式的 L 的下确界，则

$$\|f\| = |f(a)| + \|f\|_{Lipa}$$

是 $C^{\alpha}(\Omega)$ 上的范数.

现在，让我们再举出一些在某些学科中用到的例子.

例 8 在 Fourier 分析中常遇到绝对收敛 Fourier 级数的问题. 考虑满足下述条件的 Fourier 级数全体

$$\mathrm{A} = \{f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\mathrm{int}}; \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty\},$$

对于每个 $f\in \mathrm{A}$，定义 $\|f\|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|$，则 $(\mathrm{A},\|\cdot\|)$ 是线性赋范空间.

例 9 在调和分析中，Hardy 空间具有重要地位．设 D 是复平面上的单位圆盘，对于每个 $z\in D$，$z=re^{i\theta}$，$0\le r<1$，$0\le\theta<2\pi$．考虑在 D 中解析的函数 $f(z)=f(re^{i\theta})$．Hardy 空间 H^p 是由这样的解析函数构成的，

$$H^p=\{f;\ \sup_{0\le r<1}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,\mathrm{d}\theta<\infty\},$$

$$\|f\|_{H^p}=\sup_{0\le r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$H^\infty=\{f;\ \sup_{z\in D}|f(z)|<\infty\},$$

$$\|f\|_{H^\infty}=\sup_{z\in D}|f(z)|.$$

可以证明，当 $1\le p\le\infty$ 时，H^p 是线性赋范空间.

例 10 空间 $C^{(k)}(\Omega)$．设 Ω 是 n 维空间 R^n 中的有界闭集，具有连通的内部，k 是非负整数．$C^{(k)}(\Omega)$ 是在 Ω 上具有直到 k 阶连续偏导数的 n 元函数集合．以 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 表示 n 重指标，其中的每个 α_i 是非负整数．记

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n.$$

对于函数 $u(x)=u(x_1,\cdots,x_n)\in C^{(k)}(\Omega)$，令

$$\|u\|=\max_{|\alpha|\le k}\max_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right|.\quad\left(\frac{\partial^0 u}{\partial x^0}=u\right)\tag{10}$$

此时，$\|\cdot\|$ 是 $C^{(k)}(\Omega)$ 上的范数.

$C^{(k)}(\Omega)$ 是在微分方程理论中常常用到的空间．在一维的情况，记为 $C^{(k)}[a,b]$，在变分方法中也经常遇到.

例 11 空间 $\widetilde{H}^{k,p}(\Omega)$．这里 k 是非负整数，$1\le p<\infty$．对于上例中的 $C^{(k)}(\Omega)$，不用式（10）作范数，而令

$$\| u \|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega \left| \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}(x) \right|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{11}$$

则 $\|\cdot\|_{k,p}$ 也是 $C^{(k)}(\Omega)$ 上的范数．若 $p=2$，定义

$$(u,v) = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega \partial^\alpha u(x) \overline{\partial^\alpha v(x)} \mathrm{d}x, \quad \forall u, v \in C^{(k)}(\Omega)$$

则 $\widetilde{H}^{k,p}(\Omega)$ 成为内积空间．这一空间将直接导致 Sobolev 空间，后者是微分方程理论中用到的重要空间．

很多空间都可以纳入赋范空间的框架，这说明研究一般赋范空间的性质是十分重要的．另一方面针对不同对象定义不同的范数（在可能的条件下），既是研究目的所需要的，也是应该加以培养的技巧．

思考题

验证例 6－例 11 所述的空间是赋范空间。