第 2 讲　度量空间及其拓扑

教学目的：介绍度量空间的公理及其拓扑性质。

授课要点：

度量空间、赋范空间、内积空间的公理体系以及三者的相互关系。

定义 1　设 X 是某个集合，$d:X\times X\to R$ 是一个二元映射，满足

（1）　$d(x,y)\geq 0$；$d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$．

（2）　$d(x,y)=d(y,x)$．

（3）　$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$　（三角不等式）.

则称 d 是 X 上的度量（距离）函数，称 X 为度量（距离）空间．有时为了明确，记为 (X,d)．

度量空间的子集合 E，仍以 d 为 E 上度量构成的度量空间称为 (X,d) 的子空间.

例 1　对于 n 维空间 Φ^n 中的点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $y=(y_1,\cdots,y_n)$，定义

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-y_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},\tag{1}$$

容易验证 d 是 Φ^n 上的度量函数．其中的三角不等式即数学分析中用到的 Minkowski 不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-z_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-y_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}\left|y_i-z_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

记此空间为 (Φ^n,d)．称之为 n 维欧几里德（Euclid）空间.

实际上在 Φ^n 上还可以定义其他度量，例如 $d_1(x,y)=\max\limits_{1\leq i\leq n}\left|x_i-y_i\right|$，此时 (Φ^n,d_1) 仍是度量空间．但须注意应把 (Φ^n,d_1) 与 (Φ^n,d) 视为不同的度量空间．此外注意今后当说到 Φ^n 是度量空间时，总意味着它带有欧氏度量.

例 2　空间 s．

考虑上节例 2 中的线性空间 Φ^∞，对于 $x=(x_n),\ y=(y_n)$，定义

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\left|x_i-y_i\right|}{1+\left|x_i-y_i\right|}.\tag{2}$$

现证明 d 是度量函数，记此空间为　s．

证明　(1) 显然 $d(x,y)\ge 0$．若 $d(x,y)=0$，则必有 $|x_i-y_i|=0$，即 $x_i=y_i\ (i=1,2,\cdots)$，故 $x=y$．

(2) $d(x,y)=d(y,x)$ 显然．

(3) 考虑函数 $f(t)=\dfrac{t}{1+t}$，$t\ge 0$．由于 $f(t)$ 的递增性，对于任意实数 a，b，由 $|a+b|\le|a|+|b|$ 得到

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|+|b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|},$$

所以

$$\begin{aligned}d(x,z)&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-z_i|}{1+|x_i-z_i|}\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i+y_i-z_i|}{1+|x_i-y_i+y_i-z_i|}\\&\le\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\left(\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}+\frac{|y_i-z_i|}{1+|y_i-z_i|}\right)\\&=d(x,y)+d(y,z).\end{aligned}$$

例 3　空间 $C[a,b]$．

$C[a,b]$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数全体，对于 $x,y\in C[a,b]$，定义

$$d(x,y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|. \tag{3}$$

则 d 是 $C[a,b]$ 上的度量函数．容易验证

1° $d(x,y)\ge 0$．若 $d(x,y)=0$ 则 $\forall t\in[a,b]$，$x(t)=y(t)$，故 $x=y$．

2° 显然 $d(x,y)=d(y,x)$．

3°
$$\begin{aligned}d(x,z)&=\max_{a\le t\le b}|x(t)-z(t)|\\&\le\max_{a\le t\le b}\{|x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)|\}\\&\le\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|+\max_{a\le t\le b}|y(t)-z(t)|\\&=d(x,y)+d(y,z).\end{aligned}$$

$C[a,b]$ 是度量空间．

定义 2 设(X,d)是度量空间，$E \subset X$．

（1）称$\mathrm{diam}E = \sup\{d(x,y); x,y \in E\}$是$E$的直径．称$E$是有界集，若$\mathrm{diam}E < \infty$．

（2）对于x_n，$x \in X$，称 x_n（依度量d）收敛于x，若

$$d(x_n,x) \to 0 (n \to \infty).$$

记之为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$或$x_n \to x$．

定理 1 度量空间中序列的极限是惟一的．收敛序列的元素构成有界集.

证明 若$x_n \to x$，$x_n \to y$，即

$$d(x_n,x) \to 0, \quad d(x_n,y) \to 0, \quad (n \to \infty).$$

由三角不等式知道

$$0 \le d(x,y) \le d(x_n,x) + d(x_n,y) \to 0, \quad (n \to \infty).$$

故$d(x,y) = 0$，由定义知道$x = y$．后一结论是明显的.

定理 2 $d(x,y)$是两个变元的连续函数，即当$x_n \to x$，$y_n \to y$时，

$$d(x_n,y_n) \to d(x,y).$$

证明 由三角不等式知道，

$$d(x,z) - d(x,y) \le d(y,z),$$

同样地

$$d(x,y) - d(x,z) \le d(z,y) = d(y,z),$$

于是

$$\left| d(x,y) - d(x,z) \right| \le d(y,z) \tag{4}$$

应用（4），则

$$\left| d(x_n,y_n) - d(x,y) \right| \le \left| d(x_n,y_n) - d(y_n,x) \right| + \left| d(y_n,x) - d(x,y) \right|$$

$$\le d(x_n,x) + d(y_n,y) \to 0.$$

故

$$d(x_n, y_n) \to d(x, y).$$

例 4　设 X 是任一点集，定义

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y,\end{cases} \qquad \forall x,y\in X. \tag{5}$$

容易验证 (X,d) 是度量空间．称此类空间为离散度量空间．

此例说明对于任一点集 X，可以在 X 上规定某种度量函数使之成为度量空间．但是我们研究度量空间的目的在于研究空间的性质并用于解决实际问题， 因此我们通常所关心的是与空间的某种性质紧密联系的度量函数．下面是这方面的例子．

命题 2　$C[a,b]$ 中的序列 x_n 依度量收敛于 x 等价于 x_n 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 x．

由 $C[a,b]$ 中度量函数的定义直接得出．

例 5　空间 S．设 (Ω,Σ,μ) 是有限测度空间，$\mu(\Omega)<\infty$，关于 Σ 可测的函数全体记为 S．定义

$$d(x,y)=\int_\Omega \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\mathrm{d}\mu,\quad x,y\in S \tag{6}$$

将 S 中关于 μ 几乎处处相等的函数视为同一元．由定义直接验证知道 (S,d) 是度量空间．

命题 3　S 中函数序列依度量（6）收敛等价于依测度收敛．

证明　若 x_n，$x\in S$，x_n 依测度收敛于 x，则对于任何 $\sigma>0$，

$$\lim_{n\to\infty}\mu\{t,|x_n(t)-x(t)|\geq\sigma\}=0.$$

记　$E_n(\sigma)=\{t,|x_n(t)-x(t)|\geq\sigma\}$，　则

$$d(x_n,x)=\int_{E_n(\sigma)}\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}\mathrm{d}\mu+\int_{\Omega\setminus E_n(\sigma)}\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}\mathrm{d}\mu$$

$$\leq\mu(E_n(\sigma))+\frac{\sigma}{1+\sigma}\mu(\Omega).$$

由于 $\mu(\Omega)<\infty$，对于事先给定的 $\varepsilon>0$，先取 σ 足够小使第二项小于 $\frac{\varepsilon}{2}$，再取 n 足够大使第一项小于 $\frac{\varepsilon}{2}$，则知 $d(x_n,x)\to 0$．

反之，对于每个$\sigma>0$，由于

$$\frac{\sigma}{1+\sigma}\mu(E_n(\sigma))\le\int_{E_n(\sigma)}\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}\mathrm{d}\mu\le d(x_n,x),$$

所以当$d(x_n,x)\to 0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n(\sigma))=0$，这说明$x_n$依测度收敛于$x$.

思考题

1、 空间s中依度量d收敛等价于依坐标收敛.

2、 证明当d是X上的度量时，$\min\{d,1\}$与$\dfrac{d}{1+d}$也是。

3、 对于例 4 中定义的离散度量空间，若$x\in X$，$0<\varepsilon\le 1, r>1$，写出 $O(x,\varepsilon)=?$

$O(x,r)=?$

一个线性空间上未必定义有度量．反过来一个度量空间也未必是线性的．同时是线性又是度量的空间称为是线性度量空间，假若加法和数乘关于此度量是连续的．即当在X中，$x_n\to x$，$y_n\to y$，在标量域Φ中$\lambda_n\to\lambda$时

$$x_n+y_n\to x+y,\quad \lambda_n x_n\to\lambda x.$$

定义 3 设(X,d)是度量空间.

（1）若$x_0\in X$，$r>0$，称

$$O(x_0,r)=\{x\in X;d(x,x_0)<r\},$$

$$S(x_0,r)=\{x\in X;d(x,x_0)\le r\},$$

分别是以x_0为中心，r为半径的球和闭球.

（2）集合$B\subset X$称为开集，若$\forall x\in B$，存在$r_x>0$，使得$O(x_0,r)\subset B$.

（3）包含x的任一开集称为x的邻域.

（4）集合$E\subset X$称为闭集，若$X\setminus E$为开集.

引理 球$O(x_0,r)\ (r>0)$是开集.

证明 对于任意的$y\in O(x_0,r)$，取$r'=r-d(y,x_0)$，

则$r'>0$，此时$\forall z\in O(y,r')$，

$$d(z,x_0)\le d(z,y)+d(y,x_0)<r'+d(y,x_0)=r,$$

故$z\in O(x_0,r)$． z是任意的，所以$O(y,r')\subset O(x_0,r)$.

由定义知道$O(x_0,r)$是开集.

下面定理可以仿照实数轴上的情况证明之，这里将具体的证明略去.

定理 3　设 X 是度量空间，则

（1）空集 $\varnothing$ 与 X 是开集，

（2）任意多个开集之并是开集，

（3）有限个开集之交是开集.

设有集合 X 的子集族 $\{B_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$，若空集 $\varnothing$ 与 X 都属于该集族，并且该集族中的集合对于任意并和有限交封闭，则称 $\{B_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 是 X 上的拓扑，称 X 是拓扑空间．每个 B_λ 都称为是该空间中的一个开集.

定理 3 表明度量空间中由全体开集构成的集族是它的拓扑，从而每个度量空间是一个拓扑空间.

定义 4　设 X 是度量空间，$E\subset X$，$x_0\in X$.

（1）若存在 $r>0$ 使得 $O(x_0,r)\subset E$，称 x_0 是 E 的内点．E 的内点全体称为 E 的内部，记为 E°.

（2）若存在 $r>0$ 使得 $O(x_0,r)\bigcap E=\varnothing$，称 x_0 是 E 的外点，E 的外点全体记为 E^e.

（3）若 $\forall\varepsilon>0$，$O(x_0,\varepsilon)\bigcap E\neq\varnothing$，称是 E 的接触点．E 的接触点全体称为 E 的闭包，记为 $\overline{E}$.

（4）若 $\forall\varepsilon>0$，$O(x_0,\varepsilon)\bigcap(E\setminus\{x_0\})\neq\varnothing$，称 x_0 是 E 的聚点．E 的聚点全体记为 E'.

下面命题容易由定义直接验证，这里将具体的验证留给读者.

命题 4

（1）$\overline{E}\bigcup E^e=X$，$\overline{E}\bigcap E^e=\varnothing$，$\overline{E}=E\bigcup E'$.

（2）$x_0\in\overline{E}$ 当且仅当存在 $x_n\in E$，$x_n\to x_0$.

（3）$x_0\in E'$ 当且仅当存在 $x_n\in E$，$x_n\neq x_0$ 使得 $x_n\to x_0$.

定理 4　设 X 是度量空间，$E\subset X$.

（1）E 为开集当且仅当 $E=E^\circ$，E° 是包含在 E 中的最大开集.

（2）E 为闭集当且仅当 $E=\overline{E}$，$\overline{E}$ 是包含 E 的最小闭集.

（3）E 为闭集当且仅当任何 $x_n\in E$，$x_n\to x_0$，则 $x_0\in E$.

证明　1° 若 E 是开集，$\forall x_0\in E$，存在 $r>0$，使得 $O(x_0,r)\subset E$．从而 $x_0\in E^\circ$，故 $E\subset E^\circ$．显然 $E^\circ\subset E$，所以 $E=E^\circ$.

反之若 $E=E^\circ$，只须证明 E° 为开集．$x_0\in E^\circ$，x_0 为 E 的内点，故存在 $r>0$，

$O(x_0,r)\subset E$．由引理，$O(x_0,r)$为开集，故其中每一点$z\in O(x_0,r)$是$O(x_0,r)$的内点，从而为E的内点，即$O(x_0,r)\subset E^\circ$，E°为开集.

若G为开集，$G\subset E$，显然$G^\circ\subset E^\circ$，由以上所证$G=G^\circ\subset E^\circ$．

2° 对于任一集合$E\subset X$，由定义可以得出，E的外点等于E的余集的内点，即$(X\setminus E)^\circ=X\setminus\overline{E}$．若$E$闭，则$X\setminus E$开，由$1^\circ$ 知道$X\setminus E=(X\setminus\overline{E})^\circ=X\setminus\overline{E}$，从而$E=\overline{E}$．

反之若$E=\overline{E}$，则$X\setminus E=X\setminus\overline{E}=(X\setminus E)^\circ$是开集，从而$E$是闭集.

3° 定理中的（3）由（2）和命题4（3）得出.

可以直接验证，闭球$S(x_0,r)$是闭集.

定义5 设X为线性空间，若$p:X\to R$是一个映射，使得$\forall x,y\in X$，$\alpha\in\Phi$．

（1）$p(x)\geq 0$，

（2）$p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$，

（3）$p(x+y)\leq p(x)+p(y)$．

则称p是X上的半范数．若还有

（4）$p(x)=0$，则$x=0$．

称p是X上的范数．此时记$p(x)=\|x\|$，称$(X,\|\cdot\|)$是线性赋范空间．在不至于混淆时记$(X,\|\cdot\|)$为X．

定理5 （1）线性赋范空间是度量空间，并且

$$d(x,y)=\|x-y\|$$

是此空间上的度量函数.

（2）范数关于变元x是连续函数，即若$x_n\to x$，则

$$\|x_n\|\to\|x\|.$$

（3）若$x_n,y_n,x,y\in X$，$\lambda_n,\lambda\in\Phi$，并且$x_n\to x$，$y_n\to y$，$\lambda_n\to\lambda$，则

$$x_n+y_n\to x+y,\quad \lambda_n x_n\to\lambda x.$$

证 明 1° （1）由直接验证得出.

2° 在定义（2）中令$\alpha=-1$得出$\|-x\|=\|x\|$．再由定义中（3）的不等式得出

$$\|x_n\|\leq\|x\|+\|x_n-x\|,$$

或者

$$\|x_n\|-\|x\|\leq\|x_n-x\|,$$

同样地

$$\| x \| - \| x_n \| \le \| x - x_n \| = \| x_n - x \|,$$

从而

$$\big| \| x_n \| - \| x \| \big| \le \| x_n - x \|, \tag{7}$$

若 $x_n \to x$ 即 $\| x_n - x \| \to 0$，故有 $\| x_n \| \to \| x \|$.

3° 若 $x_n \to x$， $y_n \to y$，则

$$\| (x_n + y_n) - (x + y) \| \le | x_n - x \| + \| y_n - y \| \to 0,$$

即 $x_n + y_n \to x + y$.

为证后面的式子成立，注意到收敛数列 λ_n 是有界的，不妨设 $|\lambda_n| \le M$，则

$$\begin{aligned} \| \lambda_n x_n - \lambda x \| &\le \| \lambda_n x_n - \lambda_n x \| + \| \lambda_n x - \lambda x \| \\ &\le |\lambda_n| \| x_n - x \| + |\lambda_n - \lambda| \| x \| \\ &\le M \| x_n - x \| + |\lambda_n - \lambda| \| x \|, \end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时后面两项都趋于 0，故知结论成立.

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是线性赋范空间，以

$$d(x, y) = \| x - y \|$$

定义的 X 上的度量称为是由范数 $\|\cdot\|$ 诱导的度量．今后当说到一个赋范空间的度量时，总是指由它的范数诱导的度量．容易知道，线性赋范空间是线性度量空间．此时 $x_n \to x$ 当且仅当

$$\| x_n - x \| \to 0.$$

称这种收敛是依范数收敛．此外，集合 $E \subset X$ 有界，当且仅当

$$\sup\{\| x \|; x \in E\} < \infty.$$

定理 6 线性空间 X 上的度量 d 使得 X 成为线性赋范空间，当且仅当 d 满足

（1） $d(\alpha x, 0) = |\alpha| d(x, 0)$， $\forall x \in X$， $\alpha \in \Phi$.

（2） $d(x + z, y + z) = d(x, y)$， $\forall x, y, z \in X$.

证 明 若 X 是线性赋范空间，$\|\cdot\|$ 为其范数， $d(x, y) = \| x - y \|$，由范数的性质可知

$$d(\alpha x, 0) = \| \alpha x \| = |\alpha| \| x \| = |\alpha| d(x, 0),$$

$$d(x + z, y + z) = \| (x + z) - (y + z) \| = \| x - y \| = d(x, y).$$

反之，若 d 满足条件（1），（2），定义 $\| x \| = d(x, 0)$，则

1° 显然 $\| x \| \ge 0$．若 $\| x \| = 0$，即 $d(x, 0) = 0$，由度量函数的性质， $x = 0$.

2° $\| \alpha x \| = \rho(\alpha x, 0) = |\alpha| d(x, 0) = |\alpha| \| x \|$.

3° $\quad \|x+y\| = d(x+y,0) = d(x,-y)$

$$\le d(x,0)+d(0,-y)$$

$$= d(x,0)+d(y,0) = \|x\|+\|y\|.$$

故$\|\cdot\|$为 X 上的范数，X 为线性赋范空间．

例 3′　考虑例 3 中的度量空间$C[a,b]$．对于每个$x = x(t) \in C[a,b]$，现在定义

$$\|x\| = \max_{a\le t\le b} |x(t)|. \qquad (8)$$

按照函数空间的加法与数乘，$C[a,b]$是线性空间．直接验证表明$C[a,b]$是赋范空间．

此例也可用定理 6 的判定条件验证．同样地，例 4 的欧氏空间是赋范空间．注意例 5 中的s和例 8 中的S不是线性赋范空间．例如对于s，取$x = (1,0,\cdots)$，若$\alpha \ne 0,\pm 1$，则

$$d(\alpha x,0) = \frac{|\alpha|}{2(1+|\alpha|)} \ne \frac{1}{4}|\alpha| = |\alpha| d(x,0).$$

由定理 6，s不是线性赋范空间．

现在让我们转到比线性赋范空间更为特殊的一类空间．

定义 7　设 X 为线性空间，若$\forall x,y\in X$，对应有标量，记为(x,y)，满足

（1）$(y,x) = \overline{(x,y)}$，$\forall x,y\in X$．

（2）$(\alpha x,y) = \alpha(x,y)$，$\forall x,y\in X$，$\alpha\in\Phi$．

（3）$(x+y,z) = (x,z)+(y,z)$，$\forall x,y,z\in X$．

（4）$\forall x\in X$，$(x,x)\ge 0$．$(x,x)=0$时$x=0$．

则称(x,y)是x，y的内积，称 X 为内积空间．

注意$\forall x,y,z\in X$，$\alpha,\beta\in\Phi$，容易得到

1° $(0,y) = (x,0) = 0$．

2° $(x,\alpha y) = \overline{(\alpha y,x)} = \overline{\alpha(y,x)} = \overline{\alpha}(x,y)$．

3° $(\alpha x+\beta y,z) = \alpha(x,z)+\beta(y,z)$．

4° $(x,\alpha y+\beta z) = \overline{\alpha}(x,y)+\overline{\beta}(x,z)$．

若标量域是R，则 2°，3°，4° 中的共轭均可以不出现．

定理 7　在内积空间 X 中，若规定$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$，则

（1）$|(x,y)| \le \|x\|\|y\|$，$\forall x,y\in X$．

（2）$\|\cdot\|$是 X 上的范数，$(X,\|\cdot\|)$为线性赋范空间．

证明 1° 容易知道当 $x=0$ 或 $y=0$ 时，$(x,y)=0$，此时（1）中等式成立．现在设 $y\neq 0$，对于任意的 $\lambda\in\Phi$，

$$0\leq (x+\lambda y,x+\lambda y)=(x,x)+2\operatorname{Re}\overline{\lambda}(x,y)+|\lambda|^2(y,y).$$

取 $\lambda=-\dfrac{(x,x)}{(y,y)}$，代入得

$$0\leq (x,x)-2\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}+\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}=\frac{1}{(y,y)}((x,x)(y,y)-|(x,y)|^2).$$

从而

$$|(x,y)|\leq\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}=\|x\|\|y\|.$$

2° 由定义 7（4）知 $\|x\|\geq 0$．若 $\|x\|=0$，即 $(x,x)=0$，从而 $x=0$．又由定义 7（2），

$$\|\alpha x\|=\sqrt{(\alpha x,\alpha x)}=\sqrt{|\alpha|^2(x,x)}=|\alpha|\|x\|.$$

由上面 1° 的证明知道

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=(x+y,x+y)\\&=(x,x)+2\operatorname{Re}(x,y)+(y,y)\\&\leq(x,x)+2|(x,y)|+(y,y)\\&\leq\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2\\&=(\|x\|+\|y\|)^2.\end{aligned}$$

所以 $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$，$\|\cdot\|$ 是 X 上的范数．

定理 7 说明任一内积空间是线性赋范空间．以

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}$$

定义的 X 上的范数称为由内积诱导的范数．不难验证内积 (x,y) 关于两变元是连续的．即若 $x_n\to x$，$y_n\to y$，则

$$(x_n,y_n)\to(x,y).$$

定理 8 赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ 是内积空间当且仅当平行四边形公式成立

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2),\quad \forall x,y\in X. \tag{9}$$

证明 先证必要性．若 X 是内积空间，$x,y\in X$，则

$$\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)$$

$$\|x-y\|^2=(x-y,x-y)=(x,x)-(x,y)-(y,x)+(y,y)$$

相加即得

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

为了证明充分性，只需证明当平行四边形公式成立时，若 $\Phi=C$，令

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2),$$

若 $\Phi=R$，令

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2), \tag{10}$$

则 $(\cdot,\cdot)$ 即是 X 上的内积并且由它们诱导的范数正好是 $\|\cdot\|$. 这两个等式被称为极化恒等式。

思考题

1、 验证命题 4.

2、 验证闭球 $S(x_0,r)$ 是闭集。

3、 试用解函数方程的办法证明定理 8.