第 17 卷第 5 期　　温　州　大　学　学　报　　2004 年 10 月
Vol 17, No 5　　Journal of Wenzhou University　　Oct, 2004

带磨损因子的排序问题

刘　静[1]，孙世杰[2]

（1．嘉兴学院数学系，浙江嘉兴　314001；2．上海大学数学系，上海　200436）

摘　要：本文考虑下述带磨损因子的排序问题：n 个工件 j，j=1,2,⋯,n，在同一台机器上依次加工，其所需的加工时间同它被开始加工的时间有关，越后加工其所需的加工时间越多;要求适当排列这 n 个工件的加工顺序，使目标函数值达最小． 对加工全程、完工时间之和这两个目标函数文中给出了相应条件下的最优算法．

关键词：排序；磨损因子；最优算法

中图分类号：O223　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1008-309(2004)05-0058-13

在传统的排序问题中，工件的加工时间给定且在序中是独立的．而在生产实际中，从加工者角度看由于加工者重复做相同或相似的操作使其加工能力随着时间的推移而不断加强，其结果，任一给定工件所需的加工时间在序中排于后比排于前为少．这一现象引出了一类被称作为带学习因子的排序问题，Biskup[1]第一个讨论了此类排序问题(这方面的成果的简介可参见文[2])．而另一方面从机器角度看由于机器长期使用而产生磨损，因此机器的加工能力随着时间的推移而不断降低，其结果，任一给定工件所需的加工时间在序中排于后比排于前为多．这一现象就引出另一类被称作为带磨损因子的排序问题，Mosheiov[3]第一个讨论了此类问题．

如分别以：C_j，表示在序中工件 j 的完工时间；$\sum_{j=1}^{n} C_j$，表示序中 n 个工件的完工时间之和；$L_j=C_j-d_j$，表示在序中工件 j 的迟后；d_j，表示工件 j 的应交工时间；C_{max}，表示序中工件的加工全程，它等于序中最后一个完工工件的完工时间．

Mosheiov[3]引入的模式如下：n 个工件 j，j=1，2，⋯，n，需在同台机器上依次加工，其所需的加工时间同它被开始加工的时间有关，如工件 j 开始被加工的时间为 t，则其所需加工时间为 $p_j=b_jt$，其中 b_j 可视作为同工件 j 有关的一个磨损因子．要求适当排列这 n 个工件在机器上的加工程序使 C_{max} 达最小．用三参数表示法(Graham et al.)[4]，该问题被记为 $1\,|\,p_j=b_jt\,|\,C_{max}$．

本文进一步讨论上述带磨损因子的排序问题，在相应问题中对工件 j，j=1，2，⋯，n，引入了调整时间 s_j，它同磨损因子 b_j 一样同该工件何时加工无关．之所以这样做是由于工件的不同，机器对其加工所需的工件模具也不同，因此引入调整时间往往是必要的．这方面的成果可见唐国春等[5]一书中所引大量的这方面的文献．同时 Mosheiov[3]模式的缺点是如果第一个工件在零时刻开始加工，则由 $p_j=b_jt$ 知所有工件的加工时间均为零，问题就显得无意义，因此 Mosheiov[3]假设第一工件的开

收稿日期：2004-02-25

基金项目：嘉兴学院重点课题(70103006)

作者简介：刘静(1970-)，女，湖北通城人，讲师，硕士，研究方向：组合优化

始加工时间为 $t_0>0$．本文主要研究问题 $1\mid p_j=b_jt, s_j\mid C_{max}$，$1\mid p_j=bt, s_j\mid \sum_{j=1}^{n}C_j$.

一、带磨损因子的加工全程问题：$1\mid p_j=b_jt, s_j\mid C_{max}$

Mosheiov[3]证得问题 $1\mid p_j=b_jt\mid C_{max}$ 是 O(n)可解，且该问题的解值同序无关，而在引入调整时间 s_j 后，问题 $1\mid p_j=b_jt, s_j\mid C_{max}$ 的解值同序有关．事实上这时有：

定理 1　对具调整时间 s_j 的问题 $1\mid p_j=b_jt, s_j\mid C_{max}$，存在一最优序，其中 n 个工件依 $\{\dfrac{s_i(1+b_i)}{b_i}\}$ 的非降序排列．

证：设存在某一最优序π不满足定理 1 的结论，即在其中至少存在一对相邻工件 j，k，工件 k 排于 j 的前面，但 $\dfrac{s_k(1+b_k)}{b_k}>\dfrac{s_j(1+b_j)}{b_j}$．现交换π中工件 j，k 的位置，其余工件不动，设所得的序为π´．下证π´不差于π．

设在序π中排于工件 k 之前所有工件完工的时间为 C，工件 k，j 的完工时间分别为 C_k，C_j，而在序π´中工件 j，k 的完工时间分别为 C'_j，C'_k．则有：

$$C_k=C+s_k+b_k(C+s_k)$$

$$C_j=C_k+s_j+b_j(C_k+s_j)=C+s_k+b_kC+b_ks_k+s_j+b_j(C+s_k+b_kC+b_ks_k+s_j)$$

$$C'_j=C+s_j+b_j(C+s_j)$$

$$C'_k=C'_j+s_k+b_k(C'_j+s_k)=C+s_j+b_jC+b_js_j+s_k+b_k(C+s_j+b_jC+b_js_j+s_k)$$

所以要 $C'_k\leqslant C_j$，只要 $b_ks_j(1+b_j)\leqslant b_js_k(1+b_k)$，即 $\dfrac{s_j(1+b_j)}{b_j}\leqslant\dfrac{s_k(1+b_k)}{b_k}$，而依所给条件，这显然成立．而 $C'_k\leqslant C_j$ 意味着序π´中相邻工件 j，k 均完工的时间不迟于它们在序π中均完工的时间，因此它们后面的工件全部完工的时间在序π´中亦不比在序π中迟，由此π´不差于π．在继续对序π´中所有不满足定理 1 的相邻工件对均作如上处理后便得定理结论．

二、带磨损因子的完工时间之和问题：$1\mid p_j=bt, s_j\mid \sum_{j=1}^{n}C_j$

相应问题 $1\mid p_j=b_jt\mid \sum_{j=1}^{n}C_j$ Mosheiov[3]证得的结果是该问题 O(n log n)可解，其中 $\{\dfrac{b_i}{1+b_i}\}$ 的非降序为最优序．在引入调整时间 s_j 后，由于问题 $1\mid p_i=b_jt, s_i\mid C_{max}$ 的解值同序有关，相应地问题 $1\mid p_j=b_jt, s_j\mid \sum_{j=1}^{n}C_j$ 的求解就复杂了．但当各工件的磨损因子相同时(由于在同一台机器

上加工，这样的假设是合理的)，则有：

定理 2　对具调整时间 s_j 的问题 $1 \mid p_j = bt, s_j \mid \sum_{j=1}^{n} C_j$，存在一最优序，其中 n 个工件依$\{s_i\}$的非降序排列.

证：设存在某一最优序π不满足定理 2 的结论，即在其中至少存在一对相邻工件 j，k，工件 k 排于 j 的前面，但 $s_k > s_j$. 现交换π中工件 j，k 的位置，其余工件不动，设所得的序为π´. 下证π′不差于π.

设在序π中排于工件 k 之前所有工件完工的时间为 C，工件 k，j 的完工时间分别为 C_k，C_j，而在序π′中工件 j，k 的完工时间分别为 C'_j，C'_k. 则有：

$$C_k = C + s_k + b(C + s_k)$$

$$C_j = C_k + s_j + b(C_k + s_j) = C + s_k + bC + bs_k + s_j + b(C + s_k + bC + bs_k + s_j)$$

$$C'_j = C + s_j + b(C + s_j)$$

$$C'_k = C'_j + s_k + b(C'_j + s_k) = C + s_j + bC + bs_j + s_k + b(C + s_j + bC + bs_j + s_k)$$

$$C_k + C_j = (C + s_k + bC + bs_k) + (C + s_k + 2bC + 2bs_k + s_j + b^2 C + b^2 s_k + bs_j)$$

$$C'_j + C'_k = (C + s_j + bC + bs_j) + (C + s_j + 2bC + 2bs_j + s_k + b^2 C + b^2 s_j + bs_k)$$

要 $C'_j + C'_k \leqslant C_k + C_j$，只要 $s_j + 2bs_j + b^2 s_j \leqslant s_k + 2bs_k + b^2 s_k$，即 $s_j \leqslant s_k$

由条件 $s_j < s_k$ 知上不等式成立，即工件 j，k 在序π´中的完工时间之和不超过它们在序π中的完工时间之和. 而由 $s_j < s_k$，及 $b_j = b_k = b$，进一步由定理 1 可知在序π´中相邻工件 j，k 均完工的时间不迟于它们在序π中均完工的时间，因此它们后面的工件全部完工的时间在序π´中不比在序π中迟，二者结合起来便得序π´不差于π. 在继续对序π´中所有不满足定理 2 的相邻工件对均作如上处理后便得定理结论.

推论　对具调整时间 s_j 的问题 $1 \mid p_j = bt, s_j \mid \sum_{j=1}^{n} L_j$，存在一最优序，其中 n 个工件依$\{s_i\}$的非降序排列.

参考文献

[1] Biskup D. Single-machine scheduling with learning considerations [J]. Euro. J. Oper. Res, 1999, 115: 302-308

[2] Liu Jing, Sun Shijie, He Longmin. Some single machine scheduling problems with learning effect under consistent condition [J]. OR TRANSACTIONS(运筹学学报), 2003, 7(3): 21-28

[3] Mosheiov G. Scheduling jobs under simple linear deterioration [J]. Computers and Ops. R, 1994, 21(6): 653-659

[4] Graham R L, Lawler E L., Lenstra J K, et al. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling [J]. Ann. Discrete Math, 1979, 5: 287-326

[5] 唐国春, 张峰, 罗守成, 刘丽丽. 现代排序论[M]. 上海: 上海科学普及出版社, 2003

Scheduling Problem with Wearing Effect

LIU Jing[1]; SHI Jiesun[2]

(1．Department of Mathematics, JiaXin College, Jiaxin, China 314001;

2．Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai, China 200436)

Abstract: This paper considers the following scheduling problem with wearing effect: n jobs need to be processed on the same machine, the processing time for job j, j=1, 2, …n, is affected by its starting time of processed. The later the more. We are asked to sequence the n jobs in such a way that some objective functions are minimized. For the following two objective functions: the makespan and, the total completion time, this paper constructs the optimal sequence under corresponding conditions respectively.

Key words: Scheduling; Wearing effect; Optimal algorithm