

改进数据包络分析模型的研究

林瑞跃

(温州大学数学与信息科学学院, 浙江温州 325035)

摘要: 本文针对传统数据包络分析模型的局限性, 提出了以整体效益最优为出发点、优化决策单元的投入和产出指标的改进模型. 理论分析和实际应用都表明该模型在非有效决策单元的效益评估和投影控制方面比传统模型优越, 丰富和推广了现有模型, 且具有很强的实用价值.

关键词: 数据包络分析; ADEA 模型; CCR 模型; 效益评估

中图分类号: O22 **文献标识码:** A **文章编号:** 1008-309(2006)03-0042-05

Charnes 等人于 1978 年提出的数据包络分析 (DEA) 方法^[1]是运筹学领域中一种非常重要的分析工具, 其中最早出现的 CCR 模型^[1]至今仍得到普遍应用, 但是该模型的效益指数并不能反映可能有的投入冗余和产出不足, 并且该模型要求对指标的各个要素按同一比率变化, 这在实际中往往难以实现. 本文参考 Russell 的 RTE 方法^[2]、Ruggiero 等人^[3]以及 Tone 的 DEA 模型^[4], 建立一种考虑松弛和比率权重的改进 DEA 模型. 该模型不仅操作简单、切实可行, 较好地克服了 CCR 模型的上述局限性, 而且在非有效 DMU 的效益评估和投影控制方面比 CCR 模型优越.

一、改进 DEA 模型

设有 n 个决策单元 (DMU), $x_{ij} \geq 0$ 是第 j 个 DMU (记为 DMU_j) 在投入 i 上的测量值; $y_{rj} \geq 0$ 是 DMU_j 在第 r 种产出上的测量值, 则评价 DMU_{j_0} 相对效益的投入型 CCR 模型可表述为如下线性规划.

$$\begin{aligned} \min & \theta_{j_0} \\ \text{s.t.} & x_{ij_0} \theta_{j_0} - s_i^- - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = 0, \quad i=1, \dots, m, \\ & -s_r^+ + \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j = y_{rj_0}, \quad r=1, \dots, t, \\ & \forall \lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \end{aligned} \quad (1)$$

这里 θ_j ($\theta_{j_0} \leq 1$) 称为相对效益评价指数. 设规划 (1) 的最优值为 θ_j^o 以及相应的最优解为 $\lambda_j^o, s_i^{-o}, s_r^{+o}$. 若 $\theta_j^o = 1$ 且 $s_i^{-o} = s_r^{+o} = 0$ 成立, 则 DMU_{j_0} 为 DEA 有效的; 反之, 为非 DEA 有效的. 令 $\hat{x}_{ij_0} = x_{ij_0} \theta_{j_0}^o - s_i^{-o}$, $\hat{y}_{rj_0} = y_{rj_0} + s_r^{+o}$, 称 $(\hat{x}_{ij_0}, \hat{y}_{rj_0})$ 为 DMU_{j_0} 在 DEA 相对有效前沿面上的投影, 亦称为 DMU_{j_0} 的修正值, 该 $(\hat{x}_{ij_0}, \hat{y}_{rj_0})$ 构成了一个新的 DEA 有效 DMU^[1].

针对上节中指出的 CCR 模型的缺陷, 本文建立如下改进 DEA 模型, 简称 ADEA 模型.

收稿日期: 2005-11-02

作者简介: 林瑞跃(1979-), 女, 浙江瑞安人, 助教, 硕士, 研究方向: 运筹学及金融优化

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{i=1}^m w_i \theta_{ij_0} \\
& s.t. \ x_{ij_0} \theta_{ij_0} - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
& \quad -s_r + \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j = y_{rj_0}, \quad r = 1, \dots, t, \\
& \quad \forall \lambda_j, s_r \geq 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

这里, 称 θ_{ij_0} 为 DMU_{j_0} 的子效率指数; 令 $\theta_{j_0} = \sum_{i=1}^m w_i \theta_{ij_0}$ 为 DMU_{j_0} 的总体效率指数, 其中 w_i 是已知值, 且满足 $\sum_{i=1}^m w_i = 1, w_i \geq 0$, 为各子效益指数在总体效益指数中的权系数, 反映了决策者对各子效益指数的偏好及各子效益指数对总体效益指数的重要性. 与 CCR 模型相比, ADEA 模型的好处在于它不要求各个投入生产要素以相同的比例增大或减少, 而且各个投入生产要素的子效益指数 θ_{ij_0} 可以根据实际需要以指定的权重作用于总体效率指数 θ_{j_0} , 因此 ADEA 模型比 CCR 模型更具现实意义. 设规划 (2) 的最优解为 $\theta_{ij_0}^*, s_r^*, \lambda_j^*$, 若 $\theta_{ij_0}^* = 1, s_r^* = 0$, 则称 DMU_{j_0} 为 ADEA 有效; 反之, 则非 ADEA 有效. 下面分析、论证 ADEA 模型相应的理论性质.

定理 1 DMU_{j_0} 相对于 ADEA 模型 ADEA 有效等价于其关于 CCR 模型 DEA 有效.

证明: 当 DMU_{j_0} 为 ADEA 有效时, 有 $\theta_{ij_0}^* = 1, s_r^* = 0$, 此时规划 (2) 的约束条件变为

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^* x_{ij} = x_{ij_0}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j^* y_{rj} = y_{rj_0}, \quad r = 1, 2, \dots, t, \quad \forall \lambda_j^* \geq 0, \tag{3}$$

令 $\theta_{j_0} = \theta_{j_0}^* = 1, s_i^- = 0, s_r^+ = s_r^* = 0$, 显然这组 $\theta_{j_0}, s_i^-, s_r^+$ 是规划 (1) 的可行解, 又由规划 (1) 最优解的定义, 可知 $\theta_{j_0}, s_i^-, s_r^+$ 也是最优解. 因此, 由 ADEA 有效性的定义可知 DMU_{j_0} 为 DEA 有效. 此外, 设 DMU_{j_0} 为 DEA 有效, 则规划 (1) 的最优解应满足 $\lambda_j^o \geq 0, \theta_{j_0}^o = 1, s_i^{-o} = s_r^{+o} = 0$, 令 $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j^o, \tilde{\theta}_{ij_0} = \theta_{ij_0}^o = 1, \tilde{s}_r = s_r^{+o} = 0$, 则这组解是规划 (2) 的最优解, 故 DMU_{j_0} 为 ADEA 有效. 证毕.

定理 2 ADEA 模型的整体效益指数 $\theta_{j_0}^*$ 小于等于 CCR 模型的相对效率指数 $\theta_{j_0}^o$.

证明: 令 $\theta_{ij_0} = \theta_{ij_0}^o - \frac{s_i^{-o}}{x_{ij_0}}, s_r = s_r^{+o}, \lambda_j = \lambda_j^o$, 易知 $\theta_{ij_0}, s_r, \lambda_j$ 是规划 (2) 的可行解. 由 $\theta_{j_0}^*$ 为

规划 (2) 的最优解得 $\theta_{j_0}^* \leq \sum_{i=1}^m w_i \theta_{ij_0} = \sum_{i=1}^m w_i \theta_{ij_0}^o - \sum_{i=1}^m w_i \frac{s_i^{-o}}{x_{ij_0}} \leq \theta_{j_0}^o \sum_{i=1}^m w_i = \theta_{j_0}^o$, 即定理得证.

定理 3 设 ADEA 模型的最优值为 $\theta_{j_0}^* = \sum_{i=1}^m w_i \theta_{ij_0}^*$, 则 $\theta_{j_0}^* \leq 1$.

证明: 由定理 2 知 $\theta_{j_0}^* \leq \theta_{j_0}^o$, 而 CCR 模型的最优值 $\theta_{j_0}^o \leq 1$, 则 $\theta_{j_0}^* \leq 1$. 证毕.

DEA 方法与其他评价方法相比, 不仅能科学地给出 DMU 的相对有效性, 还可以提供非有效决策单元的改进方法. 这里参照 CCR 模型修正值的定义对非有效决策单元进行投影分析. 具体地, 令 $\tilde{x}_{ij_0} = x_{ij_0} \theta_{ij_0}^* = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j^*, \tilde{y}_{rj_0} = y_{rj_0} + s_r^* = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j^*$, 称 $(\tilde{x}_{ij_0}, \tilde{y}_{rj_0})$ 为 DMU_{j_0} 在 ADEA 有效生产前沿面上的投影, 这样得到的 $(\tilde{x}_{ij_0}, \tilde{y}_{rj_0})$ 相对于原来的 n 个 DMU 是 ADEA 有效的.

二、实际应用与结果分析

这一节以太原钢铁厂的 9 个规模不同的项目为评价对象进行分析, 并参考 Cooper W. W. 在企业效益评价中的指标选取方法^[5], 并结合该企业的实际情况确立投入指标为项目建设总投资、项目建成后年总成本及费用、项目建设借款, 产出指标为项目建成后年利润、财务净现值 (具体数值见表 1), 并通过咨询厂方管理层确定权重系数 w_1, w_2, w_3 分别为 0.4, 0.3, 0.3.

表 1 DMU 的投入指标及产出指标表

指标	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4	DMU5	DMU6	DMU7	DMU8	DMU9
投入 X_1	2002.6	4992	18647	12997	2929	260115.1	1210	1033.6	688.46
投入 X_2	3849.4	20096.6	120210.6	261	2390.7	304418	2254	1091.4	1042.2
投入 X_3	1600	100	13150	9735	2290	181616.9	100	100	100
产出 Y_1	1682.1	777.7	5698	1739	1217	42530	289	890.6	939.8
产出 Y_2	5683.1	2109.4	6255	1621.9	3396.6	34631.5	584	3255.1	3635.7

为了全面显示 ADEA 模型的优越性, 这里将分别用 CCR 模型和 ADEA 模型对这 9 个项目进行评价, 结果数据见表 2. 首先, 分析两个模型的有效性指标. 由 ADEA 模型所确定的各个 DMU 的总体效益最优指数总是小于等于相应的 CCR 模型的最优效益指数, 而且这两个模型评价各个 DMU 是否有效的结论是一致的, 两个模型都确定 DMU4 和 DMU9 的最优效益指数等于 1. 这个数值结果与上一节所给出的理论分析相吻合.

表 2 基于 CCR 模型和 ADEA 模型对决策单元进行有效性分析的结果

DMU	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\theta_{j_0}^o$	0.615	0.828	0.224	1	0.526	0.151	0.308	0.948	1
\hat{x}_{1j_0}	1232.2	569.71	4174.1	12997	1540.4	39309.1	211.71	652.42	688.46
\hat{x}_{2j_0}	1865.4	862.44	6318.9	261	1257.3	46004	320.49	987.64	1042.2
\hat{x}_{3j_0}	178.98	82.752	606.3	9735	658.09	11167	30.75	94.8	100
\hat{y}_{1j}	1682.1	777.7	5689	1739	1217	42530	289	890.6	939.8
\hat{y}_{2j}	6507.4	3008.6	22043	1621.9	4425.5	160980	1118	3445.4	3635.7
$\theta_{j_0}^*$	0.425	0.307	0.119	1	0.308	0.102	0.205	0.808	1
\tilde{x}_{1j_0}	1232.2	569.71	4174.1	12997	891.53	31156	211.71	652.42	688.46
\tilde{x}_{2j_0}	1865.4	862.44	6318.9	261	1349.6	47164.0	320.49	987.64	1042.2
\tilde{x}_{3j_0}	178.98	82.752	606.3	9735	129.4	4525.4	30.75	94.8	100
\tilde{y}_{1j_0}	1682.1	777.7	5689	1739	1217	42530	289	890.6	939.8
\tilde{y}_{2j_0}	6507.4	3008.6	22043	1621.9	4708.1	164531	1118	3445.4	3635.7

其次, 如表 2 所示, 这两种模型对于非有效决策单元的效益指数排序并不完全相同, 其中用 CCR 模型所得非有效单元效益评价的排序(降序)结果是 DMU8、DMU2、DMU1、DMU5、DMU7、

DMU3 和 DMU6, 但用 ADEA 模型评价所给出非有效单元的排序(降序)结果是 DMU8、DMU1、DMU5、DMU2、DMU7、DMU3 和 DMU6. 两种模型所得有效性的排序发生了变化, 造成这个变动的的原因是 ADEA 模型不要求对投入、产出的各个要素按同一比例进行增加或者减少, 并且考虑了松弛变量以及各子效益指标对于总体效益指标的权重. 评价决策单元有效性的目的并不是仅仅做出有效和非有效的简单判断, 还需要对非有效单元的效益进行排序, 分析这些非有效单元之间哪个效益稍高一些, 哪个更低一些, 以便为决策层反馈所需的信息. 因而, ADEA 模型比 CCR 模型更能真实地反映各个 DMU 之间的效益排序, 而且前者并不改变 DMU 是否有效的判定. 可以说, ADEA 模型的排序结果能更好地指导实际中的决策制定.

最后, 分别对两种模型的非有效 DMU 进行有效前沿面的投影分析. 很明显, 各个非有效 DMU 在这两个模型中的投影并不尽相同(具体数据见表 2), 造成这种现象的主要原因是 DMU 在这两个模型中不同的投影路径. CCR 模型的非有效 DMU 是以线性方式投影的, 即先将所有的投入变量按照同一比例缩小, 然后再分别增加各个投入分量; 而 ADEA 模型直接将各个投入指标按不同的比例压缩, 再赋予恰当的权重, 以总体最优的方式投影到生产前沿面上. 此外, 分析投影不同的项目 DMU5 和 DMU6. 虽然它们在 ADEA 模型中的投入指标修正值 \tilde{x}_{2j} 略大于在 CCR 模型中的 \hat{x}_{2j} , 但修正值 $\tilde{x}_{1j}, \tilde{x}_{3j}$ 却都明显地小于 $\hat{x}_{1j}, \hat{x}_{3j}$; 并且 ADEA 模型中的产出指标修正值 \tilde{y}_{2j} 的投影明显大于 CCR 模型中的 \hat{y}_{2j} . 假设各投入产出指标的权重相等, 将 DMU5, DMU6 的所有投入及产出的修正值相加, 显然在 ADEA 模型下的修正值的总投入量比 CCR 模型下的减少了, 但其总产出量反而增加了. 可见, 当决策者依据已知的信息来调整投入、产出量时, ADEA 模型要优于 CCR 模型, 它可以帮助决策者更好地控制、优化投影量, 改进非有效 DMU 中存在的不足之处, 争取在更小的投入下带来更大的产出, 这对提高决策者的管理能力具有非常大的应用价值.

三、结语

本文为改进传统 DEA 模型的不足, 提出了具有更大灵活性, 可更合理反映实际情况的 ADEA 模型. 该模型不仅考虑了松弛问题, 而且以各个投入指标的子效益指数的加权和来优化各个 DMU, 因此在非有效 DMU 的效益评估和投影控制方面比传统的 DEA 模型优越. 最后, 本文通过实际应用, 对上述理论作了进一步的阐明. 理论与实践都表明, ADEA 模型有较强的实用价值, 拓宽了 DEA 模型的应用.

参考文献

- [1] Charnes A, Cooper W W, Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units [J]. *European Journal of Operational Research*, 1978, (2): 429-444
- [2] Russell R R. Measure of technical efficiency [J]. *Journal of Economic Theory*, 1985, 35: 109-126
- [3] Ruggiero J, Bretschneider S. The weighted Russell measure of technical efficiency [J]. *European Journal of Operational Research*, 1998, 108: 438-451
- [4] Tone K. A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis [J]. *European Journal of Operational Research*, 2001, 130: 498-509
- [5] Cooper W W, Deng H, Gu B, et al. Using DEA to improve the management of congestion in Chinese industries (1981-1997) [J]. *Socio-Economic Planning Sciences*, 2001, 35: 227-242

Study of an Amended Data Envelopment Analysis Model

LIN Ruiyue

(School of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Wenzhou, China 325035)

Abstract: In order to overcome the localization of traditional data envelopment analysis (called DEA) model, this paper produces an amended DEA model, which optimizes the input and output indicators of decision making units from the global efficiency. Both theory analyses and practical applications show the model is more ascendant than traditional DEA model on performance evaluation and projection control, enriches and promotes existing DEA model, and has great practical value.

Key words: Data envelopment analysis; DEA model; CCR model; Evaluation of Performance