文章编号: 1000-5641(2009)04-0062-07

重尾分布类$\mathcal{D}\cap\mathcal{L}$中负相伴随机变量和的精确大偏差

汪世界[1,2], 王文胜[1]

(1. 华东师范大学 金融统计学院, 上海 200241; 2. 安徽大学 数学科学学院, 合肥 230039)

摘要: 利用重尾分布类$\mathcal{D}\cap\mathcal{L}$性质的刻画，得到了重尾分布类$\mathcal{D}\cap\mathcal{L}$中负相伴重尾随机变量和(随机和与非随机和)的精确大偏差，而重尾分布类$\mathcal{D}\cap\mathcal{L}$是严格包含$\mathcal{C}$的，从而首次将现有的精确大偏差结果推广到更大的重尾分布子类上.

关键词: 负相伴; 一致变化尾; 控制变化尾; 长尾; 精确大偏差

中图分类号: O211.4 **文献标识码:** A

Precise large deviation for sums of negatively associated heavy-tailed random variables in $\mathcal{D}\cap\mathcal{L}$

WANG Shi-jie[1,2], WANG Wen-sheng[2]

(1. *School of Finance and Statistics, East China Normal University, Shanghai* 200241, *China*;
2. *School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei* 230039, *China*)

Abstract: By using the characterization of heavy-tailed random variables in $\mathcal{D}\cap\mathcal{L}$, precise large deviations for sums (nonrandom sums and random sums) of negatively associated heavy-tailed random variables in $\mathcal{D}\cap\mathcal{L}$ were obtained, where the subclass $\mathcal{D}\cap\mathcal{L}$ strictly contains $\mathcal{C}$. Therefore, it firstly extends some existed precise large deviation results to some larger subclasses of heavy tailed distributions.

Key words: negatively association; consistently varying tail; dominately varying tail; long tail; precise large deviation

0 引 言

在金融与保险中, 由于重尾分布能刻画大的索赔这一特性, 所以近年来受到了广泛的关注. 而重尾随机变量和的精确大偏差(precise large deviation 或 PLD)问题是重尾分布研究中的一个非常重要的问题, 同时它还常用来近似估计公司的破产概率, 这对公司的风险管理具有非常重要的意义. Ng等[1]讨论了带一致变化尾独立同分布的随机变量和(非随机和与随机和)的精确大偏差, 从而首次将精确大偏差的结果从广义规则变化尾类[2](extented regularly

收稿日期: 2008-07

基金项目: 国家自然科学基金(10771070)

第一作者: 汪世界，男，博士研究生，研究方向为金融数学. E-mail：ahuwsj@126.com.

varing 或 ERV)推广到一致变化尾类($\mathcal{C}$)上. Tang[3]讨论了带一致变化尾负相伴(NA)的随机变量非随机部分和的精确大偏差.Chen与Zhang[4], Liu[5]分别将Tang[3]的结果推广到随机和的情形, 得到了负相伴带一致变化尾的随机变量随机和的精确大偏差.

本文在文献[3-5]的基础上, 利用重尾分布类$\mathcal{D}\cap\mathcal{L}$性质的刻画，得到了重尾分布类$\mathcal{D}\cap\mathcal{L}$中负相伴重尾随机变量和(随机和与非随机和)的精确大偏差，而重尾分布类$\mathcal{D}\cap\mathcal{L}$是严格包含$\mathcal{C}$的，从而首次将现有的精确大偏差结果推广到更大的重尾分布子类上.

1　定义和引理

令$\{X_k, k\geqslant 1\}$为支撑在$(-\infty,\infty)$ 上的同分布随机变量序列, 其分布函数为$F(x)=P(X_1\leqslant x)$, 且$EX_1=\mu<\infty$, 记$\overline{F}(x)=1-F(x), S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$, 在保险中, X_k表示索赔, 而S_n表示公司索赔的和. 再令$N(t)$为一非负整数值计数过程, 如可取$N(t)$为Poisson过程、Cox过程或一般的点过程, 则$N(t)$表示到时刻t为止买保险的人数. 同时假定$N(t)$满足: $N(t)$与$\{X_k,k\geqslant 1\}$独立, 当$t\to\infty$时, $EN(t)=\lambda(t)\to\infty$, 再记$S_{N(t)}=\sum_{k=1}^{N(t)}X_k, S_{N(t)}$表示到时刻$t$为止公司所有索赔.

定　义 1.1　称某一非负随机变量X或者其分布$F(x)$为重尾的, 如果它不存在指数矩, 即对任意$\gamma>0$, $E\mathrm{e}^{\gamma X}$不存在.

定　义 1.2　(1) 称F带控制变化尾(或属于$\mathcal{D}$), 当且仅当对任意$0<\theta<1$(或等价地对某个$0<\theta<1$),

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(\theta x)}{\overline{F}(x)}<\infty;$$

(2) 称F带一致变化尾(或属于$\mathcal{C}$), 当且仅当

$$\lim_{y\searrow 1}\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}=1,\qquad \text{或等价地}\qquad \lim_{y\nearrow 1}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}=1;$$

(3) 称F带长尾(或属于$\mathcal{L}$), 如果对任意$L>0$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x+L)}{\overline{F}(x)}=1.$$

注 1.1　定义1.2是一些非常著名的重尾分布的子类, 包括控制变化尾类($\mathcal{D}$), 一致变化尾类($\mathcal{C}$)和长尾类($\mathcal{L}$). 由文献[1, 3]可知上述重尾分布子类有如下的关系：$\mathcal{C}\subset\mathcal{D}\cap\mathcal{L}$,并且以上包含关系可以是严格的, 如取$\overline{F}(x)=1-F(x)=\exp(-\rho(\log(1+x)))$, 其中$\rho(x)=[x]+((x(x-[x]))\wedge 1)$, 可以证明$F\in\mathcal{D}\cap\mathcal{L}$, 但$F\notin\mathcal{C}$(参见文献[2]).

注 1.2　易见如果$F\in\mathcal{D}$, 则对任意$c>0,\overline{F}(cx)$ 与$\overline{F}(x)$ 在如下意义下有相同的阶.

$$0<\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(cx)}{\overline{F}(x)}\leqslant\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(cx)}{\overline{F}(x)}<\infty,$$

为方便起见, 以后记此关系为$\overline{F}(cx)\asymp\overline{F}(x)$.

定　义 1.3　令

$$J_F^*:=-\lim_{y\to\infty}\frac{\overline{F}_*(y)}{\log y},$$

其中对任意的$y>0$, $\overline{F}_*(y)=\liminf\limits_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}$, J_F^*称为分布函数F的上Matuszewska指数.

定　义 1.4　称$\{X_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$为负相伴(NA)随机变量序列, 如果对$\{1, 2, \cdots, n\}$的任意不交子集$A_1$和$A_2$，有

$$\mathrm{Cov}(f_1(X_{k_1}, k_1 \in A_1), f_2(X_{k_2}, k_2 \in A_2)) \leqslant 0,$$

其中f_1, f_2是对每个变元非增(或非降)的函数, 并且使得上述协方差存在. 称$\{X_k, k \geqslant 1\}$为NA的, 如果它的任意有限子族是NA的.

引　理 1.1[6,7]　$F \in \mathcal{L}$当且仅当

$$\mathcal{H}(F) = \{h(x) : [0, +\infty) \to [0, +\infty); h(x) \uparrow \infty, \frac{h(x)}{x} \to 0, \frac{\overline{F}(x \pm h(x))}{\overline{F}(x)} \to 1\} \neq \phi.$$

引　理 1.2[4]　若$F \in \mathcal{D}$, 则

(1) $1 \leqslant J_F^* < \infty$, 且对任意$p > J_F^*$, 有$x^{-p} = o(\overline{F}(x))$;

(2) 对每一$p > J_F^*$, 存在正常数C与D 使得对所有$x \geqslant y \geqslant D$成立

$$\frac{\overline{F}(y)}{\overline{F}(x)} \leqslant C(\frac{x}{y})^p.$$

引　理 1.3[4]　令$\{X_k, k \geqslant 1\}$ 为同分布NA随机变量序列, 且期望$\mu < 0$. 若存在某$r > 1$, 使得$E|X_1|^r < \infty$, 则对任意$0 < \theta < 1$ 满足: $(r-1)/8\theta > 1$, 必存在与x 和n无关的常数$C > 0$, 使得对任意$n \geqslant 1$以及$x > 0$, 有

$$P(S_{(n)} > x, \bigcap_{i=1}^{n}(X_i \leqslant \theta x)) \leqslant Cx^{-\frac{r-1}{8\theta}+1},$$

其中$S_{(n)} =: \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k$.

引　理 1.4[3]　令$\{X_k, k \geqslant 1\}$ 为同分布NA随机变量序列, 且期望为0, 若$F \in \mathcal{D}$, 则对任意固定的$\gamma > 0$, 存在与x和n无关的常数$C = C(\gamma)$, 使得对所有的$x \geqslant \gamma n$及$n = 1, 2, \cdots$, 有

$$P(S_n > x) \leqslant Cn\overline{F}(x).$$

引　理 1.5[7]　令$\{X_k, k \geqslant 1\}$ 为同分布NA随机变量序列, 且$EX_1^+ < \infty$, 则对任意$\theta > 0, x > 0$及$n \geqslant 1$, 有

$$P(S_n > x) \leqslant n\overline{F}(\theta x) + (\frac{e\mu_+ n}{x})^{\theta^{-1}}.$$

2　主要结果及其证明

定　理 2.1　令$\{X_k, k \geqslant 1\}$ 为同分布NA随机变量序列, 其共同分布为F, 期望为$\mu < \infty$, 若存在$r > 1$使得$E|X_1|^r < \infty$, 且$F \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$. 若存在$h(x) \in \mathcal{H}(F)$ 使得, 当$x \to \infty$时,

$$\frac{h(x)F(-h(x))}{\overline{F}(x)} \to 0. \tag{1}$$

那么, 任意给定的常数$\gamma > 0$, 对$x \geqslant h^{-1}(\gamma n)$一致地有,

$$P(S_n - n\mu > x) \sim n\overline{F}(x), \tag{2}$$

其中h^{-1}为h的反函数.

注 2.1　如果F支撑在$[s,+\infty)$上, 其中$s>-\infty$, 那么条件(1)自然成立. 在保险业中, $\overline{F}(x), x>0$与$F(x), x<0$分别用来表示公司亏损和盈余的概率, 过分追求利润可能会阻碍人们买保险, 因此保险公司在控制风险的同时必须调整其利润空间, 条件(1)即为这种调整.

证　明　不失一般性, 不妨假定$\mu=0$, 若不然, 定义$X_k'=X_k-\mu, S_n'=\sum_{k=1}^n X_k'$, 那么$EX_k'=0, X_k'\overset{d}{\sim}F(x+\mu)\sim F(x)$, 其中$\overset{d}{\sim}$表示同分布, 注意到$P(S_n-n\mu>x)=P(S_n'>x)$, 因此(2)式只要证$\mu=0$情形. 为此首先证明

$$\liminf_{n\to\infty}\inf_{x\geqslant h^{-1}(\gamma n)}\frac{P(S_n>x)}{n\overline{F}(x)}\geqslant 1. \tag{3}$$

由假设知存在$h(x)\in\mathcal{H}(F)$, 而由引理1.1, 易见对充分大x有$x>h(x)$, 因为

$$\begin{aligned}P(S_n>x)\ &\geqslant P(S_n>x,\max_{1\leqslant k\leqslant n}X_k>x+h(x))\\&\geqslant\sum_{k=1}^n P(S_n>x,X_k>x+h(x))-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(X_i>x+h(x),X_j>x+h(x))\\&:=J_1-J_2.\end{aligned}$$

先估计J_1. 实际上,

$$\begin{aligned}J_1&=\sum_{k=1}^n P(S_n>x,X_k>x+h(x))\\&\geqslant\sum_{k=1}^n P(S_n-X_k>-h(x),X_k>x+h(x))\\&\geqslant\sum_{k=1}^n[P(S_n-X_k>-h(x))+P(X_k>x+h(x))-1]\\&=\sum_{k=1}^n[\overline{F}(x+h(x))-P(\sum_{l:1\leqslant l\leqslant n,l\neq k}(-X_l)\geqslant h(x))].\end{aligned}$$

由于$\{-X_l,l=1,2,\cdots\}$ 仍为NA序列, 由引理1.4知, 存在与x和n无关的常数$C_1=C_1(\gamma)$, 使得对于任意$x\geqslant h^{-1}(\gamma n)$, 有

$$P(\sum_{l:1\leqslant l\leqslant n,l\neq k}(-X_l)\geqslant h(x))<C_1nF(-h(x))\leqslant C_1\frac{h(x)}{\gamma}F(-h(x))=o(\overline{F}(x)).$$

在上述的最后一个等式中, 我们使用了条件(1). 因而, $J_1\geqslant n\overline{F}(x+h(x))-o(n\overline{F}(x))$.
另一方面, 由NA性质知

$$\begin{aligned}J_2&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(X_i>x+h(x),X_j>x+h(x))\\&\leqslant[\sum_{1\leqslant k\leqslant n}P(X_k>x+h(x))]^2=[n\overline{F}(x+h(x)]^2.\end{aligned}$$

下面证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x>h^{-1}(\gamma n)}n\overline{F}(x+h(x))=0$, 实际上注意到$F\in\mathcal{D}$, 则

$$\int_x^\infty\overline{F}(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_x^{2x}\overline{F}(t)\mathrm{d}t\geqslant x\overline{F}(2x).$$

故

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{x\overline{F}(x)}{\int_x^\infty \overline{F}(t)\mathrm{d}t}\leqslant \limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(2x)}<\infty.$$

注意到F具有有限期望, 因此$\lim\limits_{x\to\infty} x\overline{F}(x)=0$. 从而当$n\to\infty$时,

$$\sup_{x\geqslant h^{-1}(\gamma n)} n\overline{F}(x+h(x))\leqslant \sup_{x\geqslant h^{-1}(\gamma n)}\frac{h(x)}{\gamma}\overline{F}(x+h(x))\leqslant \sup_{x\geqslant h^{-1}(\gamma n)}\frac{x+h(x)}{\gamma}\overline{F}(x+h(x))\to 0.$$

类似地可以得到$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x>h^{-1}(\gamma n)} n\overline{F}(h(x))=0$. 因此, 当$n\to\infty$时, 对所有$x\geqslant h^{-1}(\gamma n)$,

$$\frac{P(S_n>x)}{n\overline{F}(x+h(x))}\geqslant 1-\frac{o(\overline{F}(x))}{\overline{F}(x+h(x))}-nF(x+h(x))\to 1.$$

再次利用引理1.1得

$$\liminf_{n\to\infty}\inf_{x\geqslant h^{-1}(\gamma n)}\frac{P(S_n>x)}{n\overline{F}(x)}\geqslant \liminf_{n\to\infty}\inf_{x\geqslant h^{-1}(\gamma n)}\frac{P(S_n>x)}{n\overline{F}(x+h(x))}\cdot\frac{\overline{F}(x+h(x))}{\overline{F}(x)}=1.$$

下面再估计(2)式的上界, 任取$\theta>0$满足$\theta^{-1}>\frac{J_F^*+1}{16(r-1)}$, 由于

$$\begin{aligned}P(S_n>x)&\leqslant P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}X_j>x-h(x))+P(S_n>x,\max_{1\leqslant j\leqslant n}X_j\leqslant x-h(x),\max_{1\leqslant j\leqslant n}X_j>\theta x)\\&\quad+P(S_n>x,\max_{1\leqslant j\leqslant n}X_j\leqslant\theta x)\\&\leqslant n\overline{F}(x-h(x))+\sum_{i=1}^n P(S_n-X_i>h(x),X_i>\theta x)+P(S_n>x,\bigcap_{i=1}^n\{X_i\leqslant\theta x\})\\&:=K_1+K_2+K_3.\end{aligned}$$

首先由NA性质以及引理1.4得

$$\begin{aligned}K_2&=\sum_{i=1}^n P(S_n-X_i>h(x),X_i>\theta x)\leqslant\sum_{i=1}^n P(S_n-X_i>h(x))P(X_i>\theta x)\\&=\overline{F}(\theta x)\sum_{i=1}^n P(S_n-X_i>h(x))\leqslant\overline{F}(\theta x)\sum_{i=1}^n[C_2n\overline{F}(h(x))]\\&=C_2n^2\overline{F}(\theta x)\overline{F}(h(x))\asymp C_2n\overline{F}(\theta x)o(1)\asymp o(n\overline{F}(x)),\end{aligned}$$

在最后一个等式中我们使用了$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\geqslant h^{-1}(\gamma n)} n\overline{F}(h(x))=0$.

对于K_3, 令$X_k'=X_k-\gamma, S_n'=\sum\limits_{k=1}^n X_k'$, 则$EX_k'=EX_k-\gamma=-\gamma<0$. 因为$h(x)\in\mathcal{H}(F)$, 那么$\frac{2h(x)}{x}\to 0$. 故对充分大的$x$, $\theta x-2\theta\gamma n+\gamma\geqslant\theta x-2\theta\gamma\frac{h(x)}{\gamma}=\theta(x-2h(x))+\gamma>0$. 注意到$\theta^{-1}>\frac{J_F^*+1}{16(r-1)}$ 以及引理1.3得

$$\begin{aligned}K_3&=P(S_n>x,\bigcap_{i=1}^n\{X_i\leqslant\theta x\})=P(S_n-n\gamma\geqslant x-n\gamma,\bigcap_{i=1}^n\{X_i-\gamma\leqslant\theta x-\gamma\})\\&=P(S_n'\geqslant x-n\gamma,\bigcap_{i=1}^n\{X_i'\leqslant\theta x-\gamma\})\leqslant P(S_n'\geqslant x-n\gamma,\bigcap_{i=1}^n\{X_i'\leqslant 2\theta(x-n\gamma)\})\\&\leqslant C_3(x-n\gamma)^{-\frac{r-1}{16\theta}+1}\leqslant C_3\overline{F}(x-n\gamma)\leqslant C_3\overline{F}(x-h(x))=o(n\overline{F}(x-h(x))).\end{aligned}$$

再次利用$h(x)\in\mathcal{H}(F)$, 可得

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{x\geqslant h^{-1}(\gamma n)}\frac{P(S_n>x)}{n\overline{F}(x)}\leqslant 1. \tag{4}$$

由式(3)和(4)知, 定理2.1结论成立.

定　理 2.2　令$\{X_k,k\geqslant 1\}$ 为同分布NA随机变量序列, 其共同分布为F, 期望为0, 若存在$r>1$使得$E|X_1|^r<\infty$, 且$F\in\mathcal{D}\cap\mathcal{L}$. 若存在$h(x)\in\mathcal{H}(F)$满足(1). 再令$N(t)$为一非负整数值过程, 与$\{X_k,k\geqslant 1\}$独立, 且满足: 对任意$\delta>0$以及某个$p>J_F^*$, 有

$$EN^p(t)I_{(N(t)>(1+\delta)\lambda(t))}=o(\lambda(t)), \tag{5}$$

其中$I_{\{.\}}$为示性函数. 那么, 任意给定常数$\gamma>0$, 对任意$x\geqslant h^{-1}(\gamma\lambda(t))$一致地有

$$P(S_{N(t)}>x)\sim\lambda(t)\overline{F}(x). \tag{6}$$

证　明　对任意$0<\delta<1$,

$$\begin{aligned}P(S_{N(t)}>x)&=\sum_{n=1}^{\infty}P(S_n>x)P(N(t)=n)\\&=(\sum_{n<(1-\delta)\lambda(t)}+\sum_{(1-\delta)\lambda(t)\leqslant n\leqslant(1+\delta)\lambda(t)}+\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)})P(S_n>x)P(N(t)=n)\\&:=I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

对于I_2, 注意到$n\leqslant(1+\delta)\lambda(t)$, 那么$h(x)\geqslant\gamma\lambda(t)\geqslant\frac{\gamma}{1+\delta}n$, 定理2.1表明, 当$t\to\infty$时, 以及对$x\geqslant h^{-1}(\gamma\lambda(t))$一致地有

$$\begin{aligned}I_2&=\sum_{(1-\delta)\lambda(t)\leqslant n\leqslant(1+\delta)\lambda(t)}P(S_n>x)P(N(t)=n)\\&\sim\sum_{(1-\delta)\lambda(t)\leqslant n\leqslant(1+\delta)\lambda(t)}n\overline{F}(x)P(N(t)=n)\\&\sim\lambda(t)\overline{F}(x)P(|N(t)-\lambda(t)|\leqslant\delta\lambda(t))\sim\lambda(t)\overline{F}(x).\end{aligned}$$

再考虑I_1, 首先证明$\frac{N(t)}{\lambda(t)}\xrightarrow{P}1(*)$, 其中"$\xrightarrow{P}$" 表示依概率收敛. 这由下面不等式立得,

$$EN(t)I_{\{N(t)>(1+\delta)\lambda(t)\}}\leqslant\frac{EN^p(t)I_{\{N(t)>(1+\delta)\lambda(t)\}}}{(1+\delta)^{p-1}(\lambda(t))^{p-1}}=o(\lambda(t)).$$

又由于此时有$n\leqslant(1-\delta)\lambda(t)$, 则$h(x)\geqslant\gamma\lambda(t)\geqslant\frac{\gamma}{1-\delta}n$, 再次利用定理2.1得, 当$t\to\infty$时, 对$x\geqslant h^{-1}(\gamma\lambda(t))$一致地有

$$\begin{aligned}I_1&=\sum_{n<(1-\delta)\lambda(t)}P(S_n>x)P(N(t)=n)\sim\sum_{n<(1-\delta)\lambda(t)}n\overline{F}(x)P(N(t)=n)\\&\leqslant\lambda(t)\overline{F}(x)P(N(t)\leqslant(1+\delta)\lambda(t))=o(\lambda(t)\overline{F}(x)),\end{aligned}$$

在最后一个等式中, 我们使用了$(*)$ 式. 最后讨论I_3, 取$\theta^{-1}=p$, 注意到$F\in\mathcal{D}$ 以及引理1.2, 存在$C=C(\theta)>0$, 对充分大的x, 有

$$\overline{F}(\theta x)\leqslant C\overline{F}(x),\qquad x^{-\theta^{-1}}\leqslant\overline{F}(x). \tag{7}$$

对上述固定的θ 以及任意的n, 取$M=(1+(e\mu_+)^p)C$, 由引理1.5和(7)式得, 对充分大的x,

$$\begin{aligned}P(S_n>x) &\leqslant n\overline{F}(\theta x)+(\frac{e\mu_+ n}{x})^{\theta^{-1}}\\ &\leqslant nC\overline{F}(x)+(e\mu_+ n)^{\theta^{-1}}C\overline{F}(x)\\ &\leqslant Mn^p\overline{F}(x).\end{aligned}$$

因而,

$$\begin{aligned}I_3 &= \sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)} P(S_n>x)P(N(t)=n)\\ &\leqslant M\overline{F}(x)\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)} n^pP(N(t)=n)\\ &= M\overline{F}(x)EN^p(t)I_{(N(t)>(1+\delta(t)))}\\ &= o(\lambda(t)\overline{F}(x)),\end{aligned}$$

在最后的一个等式中, 我们使用了条件(5). 综上所述, 定理 2.2 证毕.

[参 考 文 献]

[1] NG K W, TANG Q H, YAN J A, et al. Precise large deviations for sums of random variables with consistently varying tails[J]. J Appl Prob, 2004, 41: 93-107.

[2] KLUPPELBERG C, MIKOSCH T. Large deviations of heavy-tailed random sums with applications in insurance and finance[J]. J Appl Prob, 1997, 34: 293-308.

[3] TANG Q H. Insensitivity to negative dependence of the asymptotic behavior of precise large deviations[J]. Electron J Pro, 2006(11): 107-120.

[4] CHEN Y, ZHANG W P. Large deviations for random sums of negatively dependent random variables with consistently varying tails[J]. Statist Prob Lett, 2007, 77: 530-538.

[5] LIU Y. Precise large deviations for negatively associated random variables with consistently varying tails[J]. Statist Prob Lett, 2007, 77: 181-189.

[6] CLIND D B H, SAMORODNITSKY G. Subexponentiality of the product of independent random variables[J]. Stochastic Process Appl, 1994, 49: 75-98.

[7] WANG K Y, WANG Y B. Notes on the asympototics of the tail probabilities of sums for negatively associated random variables with heavy tails[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2007, 23: 337-344.