文章编号: 1000-5641(2008)01-0001-19

＊ 特约综述 ＊

准地转运动稳定性的数学方法

刘永明[1,2]

(1. 华东师范大学 地理信息科学教育部重点实验室, 上海 200062;
2. 华东师范大学 数学系, 上海 200241)

摘要: 在准地转运动的非线性稳定性的研究中, 先验不等式起着至关重要的作用. 所得到的不等式越精细, 得到的非线性稳定性的结论就越好. 本文主要分两个部分, 第一部分综合性地介绍了变分原理以及利用变分原理及分析的技巧得到一系列重要的最佳不等式的方法. 这些不等式中有些是已有的结果, 只是用更直接的方法重新得到, 还有一些不等式是首次发现的. 第二部分以准地转运动的非线性稳定性的研究为主线, 介绍了有关的理论; 利用第一部分的数学基础理论对已有的准地转运动的非线性稳定性定理作了统一的处理, 使得在论证思路上更为清晰, 在证明方法上更为简洁.

关键词: 变分法; 最佳不等式; 非线性稳定性; 准地转

中图分类号: O176; O178; O175.21 **文献标识码**: A

Mathematical methods of stability for quasigeostrophic motions

LIU Yong-ming[1,2]

(1. *Key Laboratory of Geographic Information Sciences, Ministry of Education East China Normal University, Shanghai* 200062, *China*;
2. *Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai* 200241, *China*)

Abstract: The a priori estmates play an important role in the study of nonlinear stability of quasigeostophic motions. The tighter the estimate, the better the nonlinear stability criterion is. There are two main parts in this paper. In the first part, the variational principle was introduced and a series of best possible inequalities were derived by the principle and analysis, in which some known results were recovered by more direct and simpler mothods, and some of which were newly obtained. In the second part, relevent theory of quasigeostophic motions was introduced and some known results of nonlinear stability of quasigeostophic motions were recovered uniformly with simpler and clearer reduction and treatment.

Key words: variational method; best possible inequality; nonlinear stability; quasi-geostrophic

---

收稿日期: 2007-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(10671071); 地理信息科学教育部重点实验室(LGISEM)项目; 大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室(LASG)项目

作者简介: 刘永明, 男, 教授, 详见封2介绍. E-mail: ymliu@math.ecnu.edu.cn.

0 引 言

大气和海洋的运动的稳定性对于地球的气象变化起着至关重要的作用. 研究其稳定性的方法基本上分成线性与非线性两大类, 线性稳定性是只考虑小扰动, 将非线性的模型按扰动量展开, 略去扰动量的非线性项得到一个线性化的模型. 进而对这线性化的模型进行研究. 对于 Hamilton 系统而言, 由于运动没有衰减, 线性稳定性的定义是: 若对于在初始时刻的一个任意小扰动, 线性化模型的运动的幅度在任何时刻都是小的, 则称原模型是线性稳定的. 非线性稳定性是考虑任意有限幅度的初始扰动的影响. 若对于任意有限幅度的初始扰动, 非线性模型的运动的幅度在任何时刻都是有限的, 并且当初始扰动的幅度趋于零时, 这运动的幅度一致地趋于零, 则称该模型是非线性稳定的. 显然后者更加符合实际情况. 准地转运动模型是大气与海洋动力学中的一个简化的但重要的模型 [1]. 它是一个 Hamilton 系统. 通常可用能量法来研究 Hamilton 系统的非线性稳定性 [2]. 是否能够成功地应用这个方法的关键是如何对于一个具体的模型构造一些适当的能量泛函, 以及建立这些能量泛函的若干个先验的不等式. 自从 Arnold 在 1966 年对一个简单的二维 Euler 方程在假定了在边界上无环流扰动的情况下建立了非线性稳定性定理 (称为 Arnord 第二定理) 以来, 在 1987 年, 对于周期带域上一个三维的准地转模型的非线性稳定性的研究有了一些结果 [3]. 但是该结果和 Arnold 的一样, 要求在边界上无环流扰动及无位温扰动等不实际的假设. 在 1992, 1993 年, 这个不实际的假设被去除了 [4],[5]. 但是由于先验不等式的估计比较粗糙, 所得结果与线性稳定性的结果相差较大. 在 1996 年, 由于用了变分原理得到了精细的先验不等式, 从而得到了更好的结果 [6]. 但是这个结果与线性稳定性的结果仍然有一些差距. 2006 年, 利用了附加的动量守恒的约束条件得到更精细的先验不等式, 从而证明了在实际的物理环境下, 线性稳定性判据和非线性稳定性判据是一致的 [7].

从以上可见变分原理和建立精细的不等式的重要性. 因此在本文的第 1 节, 先简要地介绍变分原理, 然后由变分原理得到了一系列有用的最佳不等式. 有些最佳不等式是已有的 (在文中都有注明), 只是尽可能地用初等的分析方法来重新论证. 在以下没有注明出处的不等式是作者新得的结果.

在第 2 节, 用统一的方法对于转地转运动的在 Arnord 第二定理的意义 (具体含义在以后有说明) 下的非线性稳定性的已有结果重新给出了证明. 在论证思路上更为清晰, 在证明方法上更为简洁.

1 数学基础

最价不等式的获得, 往往要借助于变分原理. 为了讨论问题的需要, 首先给出最一般的一维的变分原理, 推广到高维的情况没有本质上的困难.

1.1 变分原理

不失一般性, 以下考虑有限闭区间 $I=[0,a]$.

定义 1.1 一个在 I 上定义的函数称为是分段连续的, 是指其不连续点都是第一类不连续点, 且皆为 I 的内点. 并且这函数的不连续点集无聚点. 此定义对无界区间也适用.

引理 1.1 设函数 g 在 I 上分段连续, 若对于 $\forall\eta\in C_0^\infty(I)$ 有 $\int_0^a g\eta'\,\mathrm{d}x=0$, 则 $g(x)$ 在 I 上恒等于一个常数.

证明 用反证法. 不然, 则存在常数 C 及 I 中两个长度大于零的不相交的闭子区间 I_1, I_2, 使得: $g(x)>C>g(y)$, $\forall x\in I_1$, $\forall y\in I_2$. 取 $\eta\in C_0^\infty(I)$, $\eta'(x)>C>\eta'(y)$, $\forall x\in I_1$,

$\forall y \in I_2$; $\eta(x)=0$, $x \notin I_1 \bigcup I_2$. 则 $0=\int_0^a (g-C)\eta' \,\mathrm{d}x > 0$. 矛盾.

引理 1.2 设函数 g 在 I 上分段连续, 函数 $f \in L^1(I)$, 若 $\int_0^a (f\eta + g\eta')\,\mathrm{d}x = 0$, $\forall \eta \in C_0^\infty(I)$. 则 $g(x)=g(0)+\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $\forall x \in I$.

证明: 令 $h(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 利用分部积分, 得 $0=\int_0^a (f\eta+g\eta')\,\mathrm{d}x=\int_0^a (g-h)\eta'\,\mathrm{d}x$, 由引理 1.1 得证.

定理 1.1 设 $F(x,y,z)$ 是在其变元的某区域上定义的一阶连续可微函数, 若有在 I 上连续且其导函数分段连续的函数 $y=\phi(x)$, 使泛函

$$J(y)=\int_0^a F(x,y(x),y'(x))\,\mathrm{d}x$$

达到极值 (称函数 ϕ 为极值函数), 则 ϕ 必满足

$$\int_0^x F_y(t,\phi(t),\phi'(t))\,\mathrm{d}t = F_z(x,\phi(x),\phi'(x)) - F_z(0,\phi(0),\phi'(0)) \qquad x \in I.$$

从而, 作为 x 的函数 $F_z(x,\phi(x),\phi'(x))$ 是全连续函数, ϕ 几乎处处满足以下 Euler 方程:

$$F_y(x,\phi(x),\phi'(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_z(x,\phi(x),\phi'(x)) \qquad \text{a.e.}\, x \in I.$$

证明 设 $\eta \in C_0^\infty(I)$, ϵ 是实参数, 设 $y=\phi(x)$ 是极值函数, 考虑 ϵ 的函数:

$$j(\epsilon)=J(\phi+\epsilon\eta)=\int_0^a F(x,\phi(x)+\epsilon\eta(x),\phi'(x)+\epsilon\eta'(x))\,\mathrm{d}x.$$

在 $|\epsilon|$ 充分小时有定义, 且在 $\epsilon=0$ 时达到极小值, 所以应成立

$$j'(0)=\int_0^a [F_y(x,\phi(x),\phi'(x))\eta(x) + F_z(x,\phi(x),\phi'(x)\eta'(x)]\,\mathrm{d}x = 0.$$

由引理 1.2 即得证.

现考虑

问题 1.1 求

$$\lambda := \inf \frac{\int_0^a ry'^2\,\mathrm{d}x - p_0 r(0)y^2(0) - p_a r(a) y^2(a)}{\int_0^a \rho y^2\,\mathrm{d}x}, \tag{1}$$

其中下确界是对所有使 (1) 有定义的函数类 (我们称之为允许函数类) 中的函数 y 来取的. 还有 $r(x)>0, \rho(x)>0, x\in(0,a)$ 是 I 上的连续函数, 且 r 还是 I 上的全连续函数, p_0, p_a 是常数. 其中两个边界项可以只有一项或没有, 发生这种情况可以由 r 在边界上等于零产生的, 或是常数 p_0, p_a 有等于零产生的, 或是指定 y 在某些边界上等于零产生的.

由变分理论, 问题 (1) 可通过将 λ 作为 Lagrange 乘子化为泛函

$$G(y) := \frac{1}{2}\left[\int_0^a (ry'^2 - \lambda\rho y^2)\,\mathrm{d}x - p_0 r(0) y^2(0) - p_a r(a) y^2(a)\right] \tag{2}$$

的变分问题.

假设存在 (2) 的极值函数 $y=\phi$. 我们用变分原理来求 ϕ. 由于现在 (2) 中有边界项, 我们改用 $\eta\in C^\infty(I)$, 类似于定理 1.1 的证明, 可得到极值函数应满足

$$\int_0^a(-\lambda\rho\phi\eta+r\phi'\eta')\,\mathrm{d}x-p_0r(0)\phi(0)\eta(0)-p_ar(a)\phi(a)\eta(a)=0.$$

分部积分, 得到

$$-\int_0^a[\lambda\rho\phi\eta+(r\phi')')\eta]\,\mathrm{d}x-r(0)[\phi'(0)+p_0\phi(0)]\eta(0)+r(a)[\phi'(a)-p_a\phi(a)]\eta(a)=0.$$

由 $\eta\in C^\infty(I)$ 的任意性, 极值函数 ϕ 必须几乎处处满足以下二阶常微分方程

$$(r\phi')'+\lambda\rho\phi=0\qquad \text{a.e.}\, x\in I. \tag{3}$$

(3) 式的边值条件是: 当 $r(0)>0$ 时, 如不指定 y 的边界条件, 取边值条件 $\phi'(0)=-p_0\phi(0)$; 如指定 $y(0)=0$ 时, 取边值条件 $\phi(0)=0$. 当 $r(0)=0$ 时, 在 $x=0$ 点给 $\phi(0)$ 以自然边界条件 (即有界). 同样当 $r(a)>0$ 时, 如不指定 y 的边值条件, 取边值条件 $\phi'(a)=p_a\phi(a)$; 指定 $y(a)=0$ 时, 取边值条件 $\phi(a)=0$. 当 $r(a)=0$ 时, 在 $x=a$ 点给 $\phi(a)$ 以自然边界条件.

因此, 问题就化为求 (3) 式在对应的边值条件下的最小特征值 λ 的问题. 但是特别要注意, Euler 方程 (3) 只是极值函数要满足的必要条件, 必须要证明如此得到的 λ 的确是 (1) 所定义的. 还有 (1) 式中的下确界不一定由允许的函数类中的函数达到 (例如下面的命题 1.2.7). 为此, 我们给出一个简单的判断极值函数的方法.

方法 1.1 设求得 (3) 式的边值问题的一个最小特征值 λ 及对应的特征函数 $\phi(x)>0, x\in(0,a)$. 定义 $w(x)$ 为

$$\phi'=w\phi. \tag{4}$$

若以下恒等式

$$\int_0^a[ry'^2+((rw)'+rw^2)y^2]\,\mathrm{d}x=r(x)w(x)y^2(x)\big|_0^a+\int_0^a r(y'-wy)^2\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

有意义. 则得不等式

$$\int_0^a(ry'^2-\lambda\rho y^2)\,\mathrm{d}x\geqslant p_0r(0)y^2(0)+p_ar(a)y^2(a). \tag{6}$$

由于 $y=\phi$ 时等号成立. 故 λ 就是 (1) 所求的值.

在此要特别注意, 虽然 (1) 式定义的 λ 是存在的, 但一般不一定由允许函数达到. 但只要对 $r(x)$ 提出更严格的要求, 如 $r(x)>0$, $x\in I$, $r\in C^1(I)$, 则由 Sturm-Liouville 理论, 这是肯定的.

由定义 (1) 可见, 如不限制 $y(0)=0$, $y(a)=0$ 时, 则当 $r(0)p_0>0$, $r(a)p_a>0$ 时 $\lambda<0$; 当 $r(0)p_0=0$, $r(a)p_a=0$ 时 $\lambda=0$; 当 $r(0)p_0<0$, $r(a)p_a<0$ 时 $\lambda>0$, 且以如下问题的最小特征值为其上界.

$$(ry')'+\lambda\rho y=0, x\in I,\qquad y(0)=0=y(a).$$

1.2　不等式

现用 §1.1 的理论来对于所有在 I 上为全连续且其导函数 $\in L^2(I)$ 的函数 y 来建立下列最优积分不等式 (设 k 是实常数).

命题 1.2.1

$$\int_0^a \left(y'^2 + \frac{4k^2}{a^2}y^2\right) \mathrm{d}x \geqslant \frac{2k\tanh k}{a}\left(y^2(0)+y^2(a)\right).$$

证明　在 (5) 式中, 取 $w(x)=2k\tanh(2k(x/a-1/2))/a$ 即得.

命题 1.2.2　设 B_0 是常数, 且设 (4) 中的 $\phi(x) := 1 + r(0)B_0\int_0^x r^{-1}\,\mathrm{d}x > 0 \qquad x\in I$, 则

$$\int_0^a ry'^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{r(0)B_0y^2(a)}{1+r(0)B_0\displaystyle\int_0^a r^{-1}\,\mathrm{d}x} - r(0)B_0y^2(0).$$

且仅当 y 是 ϕ 的常数倍时等号成立.

由命题 1.2.2 易得推论:

命题 1.2.3　设 B_0 是常数, 且 $\phi(x) := 1 + r(0)B_0\int_0^x r^{-1}\,\mathrm{d}x > 0, \quad x\in I$, 若常数 B_a 满足不等式,

$$r(a)B_a < \frac{r(0)B_0}{1+r(0)B_0\displaystyle\int_0^a r^{-1}\,\mathrm{d}x},$$

则

$$\int_0^a ry'^2\,\mathrm{d}x \geqslant r(a)B_ay^2(a) - r(0)B_0y^2(0).$$

且仅当 $y=0$ 时等号成立.

命题 1.2.4　若 $y(0)=0$, 则有最佳不等式:

$$y^2(x) \leqslant \frac{\tanh(kx)}{k}\int_0^x (y'^2+k^2y^2)\,\mathrm{d}x.$$

证明　在方法 1.1 中, 取 $\phi(x)=\sinh(kx)$. 即得. 注意虽然 $\phi(0)=0$, 但由于 $y(0)=0$, $y'\in L^2(I)$, 由 Cauchy 不等式可推出 $y(x)=o(\sqrt{|x|}), x\to 0$. 故恒等式 (5) 在 $x=0$ 的邻域还是有意义的.

由命题 1.2.4 易得推论

命题 1.2.5　若 $y(0)=0$, 则有最佳不等式

$$y^2 \leqslant \frac{\tanh(ka)}{k}\int_0^a (y'^2+k^2y^2)\,\mathrm{d}x \qquad \forall x\in[0,a].$$

由命题 1.2.5 易得推论

命题 1.2.6　若 $y(0)=0=y(a)$, 则有最佳不等式

$$y^2 \leqslant \frac{\tanh(ka/2)}{2k}\int_0^a (y'^2+k^2y^2)\,\mathrm{d}x \qquad \forall x\in[0,a].$$

证明　设 $\max|y(x)|=|y(c)|$, $c\in(0,a)$, 由命题 1.2.5 得

$$\int_0^a (y'^2+k^2y^2)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\frac{k}{\tanh(kc)}+\frac{k}{\tanh(k(a-c))}\right)y^2(c) \geqslant \frac{2k}{\tanh(ka/2)}y^2.$$

最佳性由取 $y(x)=\sinh(k(a/2-|a/2-x|))$ 可知.

命题 1.2.7 成立如下最佳不等式:

$$\int_0^a (x^2y'^2-\lambda y^2)\,\mathrm{d}x \geqslant kay^2(a).$$

其中当 $k>-1/2$ 时, $\lambda=-k(1+k)$, 当 $k\leqslant -1/2$ 时, $\lambda=1/4$.

证明 当 $k>-1/2$ 时, 由问题 1.1 中令 $p_0=0$, $r=x^2$, $\rho=1$, 得特征函数 $\phi(x)=x^k$, 根据方法 1.1, 即得恒等式.

$$\int_0^a (x^2y'^2+k(k+1)y^2)\,\mathrm{d}x = \left.kxy^2(x)\right|_0^a+\int_0^a (xy'-ky)^2\,\mathrm{d}x.$$

所以当 $k\leqslant -1/2$ 时, $\lambda=-k(1+k)$. 但当 $k\leqslant -1/2$ 时, $y=x^k$ 时恒等式失去意义. 我们要证明, 这时由 (1) 定义的值为 $\lambda=1/4$.

当 $k=-1/2$ 时, $-k(1+k)=1/4$, 因 λ 是 k 的单调减函数, 所以, 当 $k\leqslant -1/2$ 时, $\lambda\geqslant 1/4$. 我们只要再证明 $\lambda\leqslant 1/4$ 即可. 令

$$\epsilon>0,\qquad y_\epsilon(x)=4\epsilon^3\frac{(x/a)^\epsilon\ln(x/a)}{a\sqrt{x/a}}.$$

计算得

$$\frac{\displaystyle\int_0^a (xy'_\epsilon(x))^2\,\mathrm{d}x-kay(a)^2(a)}{\displaystyle\int_0^a y_\epsilon^2(x))\,\mathrm{d}x}=(1+\epsilon^2)/4.$$

令 $\epsilon\to 0$ 得, 当 $k\leqslant -1/2$ 时, $\lambda=1/4$. 这个命题说明了当在区间 I 的边界上 $r=0$ 时, 定义 (1) 中的下确界 inf 一般不能改为 min.

以下三个命题是熟知的, 在此给出的是新的直接的证明:

命题 1.2.8 设 (1) $\int_0^a y(x)\,\mathrm{d}x=0$, 或 (2) $y(0)=0=y(a)$ 时, 则有以下最佳不等式

$$\int_0^a y'^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi^2}{a^2}\int_0^a y^2\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

证明 对于条件 (1), 设 $z(x)=\int_0^x y(x)\,\mathrm{d}x$, 我们给出以下恒等式:

$$\begin{aligned}\int_0^a \left(y'^2-\frac{\pi^2}{a^2}y^2\right)\mathrm{d}x &= \frac{\pi^2 z(x)}{a^2}\left(-2y(x)+\frac{\pi z(x)}{a\tan(\frac{\pi x}{a})}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=a}+\\ &\int_0^a\left[\left(y'+\frac{\pi^2}{a^2}z\right)^2+\frac{\pi^2}{a^2}\left(y-\frac{\pi z}{a\tan\left(\frac{\pi x}{a}\right)}\right)^2\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{8}$$

注意到 $z(x)=O(|x|), x\to 0; z(x)=O(|a-x|), x\to a$, 因此 (8) 有意义. 并且, 当取 $y=\phi(x)$ 时不等式 (7) 中等号成立, 因此 (7) 式是最佳不等式.

对于条件 (2), 在 (5) 中取 $r=1=\rho$, $y(0)=0=y(a)$, $\lambda=\dfrac{\pi^2}{a^2}$, $w=\dfrac{\pi}{a}\cot(\dfrac{\pi x}{a})$, 即得

$$\int_0^a (y'^2-\lambda y^2)\,\mathrm{d}x = w(a)y^2(a)-w(0)y^2(0)+\int_0^a r(y'-wy)^2\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

同样注意到 $y(x)=o(\sqrt{|x|}), x\to 0; y(x)=o(\sqrt{|a-x|}), x\to a$. 即得 (7).

命题 1.2.9 设 (1) $\displaystyle\int_0^a y(x)\,\mathrm{d}x=0$, 且 (2) $y(0)=y(a)$ 时, 成立以下最佳不等式

$$\int_0^a y'^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{4\pi^2}{a^2}\int_0^a y^2\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

证明 考虑函数 $z(x)=y(x+a/2)-y(x)$ 及条件 (2), 知存在 $c\in[0,a/2)$, 使得 $z(c)=0$, 即 $y(c)=y(c+a/2)$, 由 $y(x)$ 的周期性, 不妨假设 $y(0)=y(a/2)=y(a)=b$. 即在区间 $[0,a/2]$ 及 $[a/2,a]$ 上均满足命题 1.2.4 的条件 2, 故

$$\int_0^a y'^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{4\pi^2}{a^2}\int_0^a (y-b)^2\,\mathrm{d}x = ab^2+\frac{4\pi^2}{a^2}\int_0^a y^2\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

(11) 中等式成立是应用了条件 (1). 当 $y=\sin(2\pi x/a)$ 时, (10) 中等号成立.

由命题 1.2.9 易得以下推论:

命题 1.2.10 设 $y(0)=y(a)$, 则成立以下最佳不等式

$$\int_0^a y'^2\,\mathrm{d}x \geqslant -\frac{4\pi^2\bar{y}^2}{a}+\frac{4\pi^2}{a^2}\int_0^a y^2\,\mathrm{d}x, \tag{12}$$

本节用 $\bar{y}$ 表示 y 在 I 上的积分平均.

命题 1.2.11 设 (1) $\displaystyle\int_0^a y(x)\,\mathrm{d}x=0$, (2) $y(a)-y(0)+F\displaystyle\int_0^a xy(x)\,\mathrm{d}x=0$, $F\geqslant 0$ 是常数, 则成立以下最佳不等式

$$\int_0^a y'^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{4\pi^2}{a^2}\int_0^a y^2\,\mathrm{d}x. \tag{13}$$

证明 因 y 是全连续函数, 故可将函数 y 展开为 I 上的余弦级数 (用 $\hat{u}$ 表示函数 u 的 Fourier 级数):

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) =: \hat{y}(x).$$

且有 $\widehat{y'}=\hat{y}'$. 其中没有常数项是由于条件 (1). 由假设 $y'\in L^2(I)$, 故可以将连续的极值问题转化为离散的条件极值问题. 先考虑一个一般的离散的极值问题:

问题 1.2.1 求

$$\lambda := \inf\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n c_n^2}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n^2}, \quad ,\lambda_1<\lambda_2<..., \qquad \text{s.t.} \quad \sum_{n=1}^{\infty}c_n s_n=0, \tag{14}$$

其中 $\lambda_n=n^2\pi^2/a^2$, $s_{2n}=0$, $s_{2n-1}=1+F/\lambda_{2n-1}$, $n=1,2,....$

对于一般的问题 1.2.1, 我们给出以下结果.

命题 1.2.12[8]

(1) 当 $s_1=0$ 时, $\lambda=\lambda_1$;

(2) 当 $s_1\neq 0,\ s_2=0$, 且 $\sum_{n=3}^{\infty}\dfrac{s_n^2(\lambda_2-\lambda_1)}{s_1^2(\lambda_n-\lambda_2)}\leqslant 1$ 时, $\lambda=\lambda_2$;

(3) 当 $s_1\neq 0,\ s_2\neq 0$ 或 $s_2=0$, 且 $\sum_{n=3}^{\infty}\dfrac{s_n^2(\lambda_2-\lambda_1)}{s_1^2(\lambda_n-\lambda_2)}>1$ 时, λ 是以下方程在 (λ_1,λ_2) 中的惟一根:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n^2}{\lambda_n-\lambda}=0.$$

将 $\lambda:=\inf\dfrac{\int_0^a y'^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^a y^2\,\mathrm{d}x}$ 化为问题 1.2.1 来解决. 可以计算得出命题 1.2.11 中的条件满足命题 1.2.12 中的第 (2) 款 [8], 从而得证.

这种将问题离散化的方法还可用来得到用函数的 H^1 范数来估计函数的 L^∞ 范数的不等式:

命题 1.2.13 设 $y(0)=y(a)$, 则成立如下最佳不等式:

$$|y|\leqslant|\bar{y}|+\sqrt{C\int_0^a\left(\frac{4k^2}{a}(y^2-\bar{y}^2)+ay'^2\right)\mathrm{d}x}\qquad\forall\, x\in I,\tag{15}$$

其中 $C:=[k\coth(k)-1]/(4k^2)\leqslant 1/12,\ k\geqslant 0$ 是常数.

证明 将函数 y 展开为 I 上的 Fourier 级数:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cos\left(\frac{2n\pi(x-\theta_n)}{a}\right).$$

故

$$|y|\leqslant|c_0|+\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|.$$

利用 Cauchy 不等式得

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|\right)^2\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}2(k^2+n^2\pi^2)c_n^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(k^2+n^2\pi^2)}.$$

再利用恒等式

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^2}{n^2\pi^2+x^2}=\frac{x}{\tanh x}$$

得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(k^2+n^2\pi^2)}=\frac{k\coth(k)-1}{4k^2}=:C.$$

又因 $\bar{y}=c_0$, 及

$$\int_0^a\left(\frac{4k^2}{a}(y^2-\bar{y}^2)+ay'^2\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}2(k^2+n^2\pi^2)c_n^2.$$

故得证. 又由方法 1.1, 取 $y=\cosh(2k(x/a-1/2))$ 时不等式 (15) 中等号成立, 故得最佳性.

命题 1.2.14 设 $y(0)=y(a)$, 则成立如下最佳不等式:

$$y^2 \leqslant \frac{1}{4k\tanh k}\int_0^a \left(4k^2y^2/a+ay'^2\right)\,\mathrm{d}x \qquad k>0.$$

证明　用类似于命题 1.2.13 的证明方法. 当 $y=\cosh(2k(x/a-1/2))$ 时不等式中等号成立, 故得最佳性.

命题 1.2.15　成立如下最佳不等式:

$$y^2 \leqslant \frac{1}{k\tanh k}\int_0^a \left(k^2y^2/a+ay'^2\right)\,\mathrm{d}x \qquad k>0.$$

证明　将函数 y 展开为 I 上的余弦级数:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cos(n\pi x/a).$$

再用类似命题 1.2.13 的证明方法. 当 $y=\cosh(kx/a)$ 时不等式中等号成立, 故得最佳性.

2　准地转模型

在以下几节我们给出不等式在准地转运动上的应用, 这些结果比已有的结果在数学理论上更一般, 方法上更简单和统一, 结果上更简洁. 其中的技巧和方法可以进一步应用到其他领域. 有关大气运动的稳定性的综合性介绍可参看文献 [9,10]. 要进一步深入学习用变分原理研究大气运动的稳定性可参看经典著作 [11]. 大气动力学方面可参看文献 [1,12]. 首先对各种准地转模型作一些介绍.

2.1　三维准地转运动

先介绍平面三维准地转运动, 与之有关的稳定性研究的历史进展可参看文献 [13-19].

在此讨论的三维准地转运动的模型包含了文献 [1] 及 [20] 的模型, 更具有数学上的一般性. 位涡 P 的守恒方程为

$$\frac{\partial P}{\partial t}+J(\Phi,P)=0, \tag{16}$$

其中位涡 P 用流函数 Φ 表示如下,

$$P=\Delta\Phi+\frac{1}{\rho}(r\Phi_z)_z+f, \tag{17}$$

其中 $r=r(z)>0, \rho=\rho(z)>0$, $f=f(x,y)$ 是已知函数. 区域 $\Omega=D\times[z_1,z_2]$, D 是 x,y 平面上的具有光滑边界 ∂D_j, $j=1,...,J$ 的有界区域. $J(f,g)=f_xg_y-f_yg_x$ 是 Jacobi 算子. Δ 是二维 Laplace 算子. 边界条件为固壁条件与环量守恒:

$$\Phi_s|_{\partial D}=0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_{\partial D_j}\Phi_n\,\mathrm{d}s=0, \quad j=1,2,\cdots,J. \tag{18}$$

其中下标 s 与 n 分别表示在边界 ∂D 上的切向和法向导数, $\mathrm{d}s$ 表示边界 ∂D 的弧长微元. 在底层和顶层 $z=z_i$ 上的边界条件为

$$\frac{\partial\Lambda_i}{\partial t}+J(\Phi_i,\Lambda_i)=0, \quad z=z_i, \quad \Lambda_i=\Phi_{z_i}-B_i\Phi_i+h_i, \quad i=1,2, \tag{19}$$

其中 $h_i = h_i(x, y)$ 是已知函数. 在此及以后用下标 $i = 1, 2$ 表示在 $z = z_i$ 上取值的量. B_i 是常数, 满足条件

$$1 + r_1 B_1 \int_{z_1}^{z} r^{-1}\,\mathrm{d}z > 0, \quad z \in [z_1, z_2]; \quad r_2 B_2 < \frac{r_1 B_1}{1 + r_1 B_1 \int_{z_1}^{z_2} r^{-1}\,\mathrm{d}z}. \tag{20}$$

条件 (20) 是数学上为了保证总能量 (23) 是正定的而作的最一般的假设. 在具体的物理问题中应是满足的. (由命题 1.2.2, 1.2.3 可得总能量的正定性).

由以上方程及边值条件, 我们要推导出一些关于时间 t 的守恒量.

命题 2.1.1 设 $G(u)$ 连续可微, 则 P 的守恒性表现在

$$\frac{\partial}{\partial t}\int G(P)\,\mathrm{d}D = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int G(\Lambda_i)\,\mathrm{d}D = 0, \qquad i = 1, 2.$$

在本文中, 为简化记号, 多元积分仍用单个积分号表示, 而用 $\mathrm{d}D$ 表示在区域 D 上的积分微元; 用 $\mathrm{d}\Omega$ 表示在 Ω 上的积分微元; 对于一重积分, 在不会误解时也省略上下积分限.

证明 由 (16), Green 公式, 及 (18) 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int G(P)\,\mathrm{d}D &= \int G'(P)P_t\,\mathrm{d}D = \int[(\Phi_y G(P))_x - (\Phi_x G(P))_y]\,\mathrm{d}D\\ &= \int_{\partial D} G(P)(\Phi_x\,\mathrm{d}x + \Phi_y\,\mathrm{d}y) = 0.\end{aligned}$$

其余的可类似地证明.

命题 2.1.2 用上横线$^-$表示在 D 上的积分平均. 则 $\bar{\Phi}_z$, $\bar{\Phi}$ 是守恒量.

证明 在命题 2.1.1 中令 $G(u) = u$, 及由 (17), Green 公式, (18) 得

$$0 = \int P_t\,\mathrm{d}D = \int \Phi_{tn}\,\mathrm{d}s + \int \frac{1}{\rho}(r\Phi_{zt})_z\,\mathrm{d}D = \int \frac{1}{\rho}(r\Phi_{zt})_z\,\mathrm{d}D.$$

所以, 对于某个函数 $f_1(t)$, 有

$$\bar{\Phi}_{zt} = \frac{f_1(t)}{r(z)}.$$

我们只要证明 $f_1(t) = 0$ 即可. 当 B_1, B_2 中有至少有一个零时, 在命题 2.1.1 中, 取 $G(u) = u$, 得 $\bar{\Phi}_{zt}$. 在 $z = z_1$, 或 $z = z_2$ 上等于零. 故 $f_1(t) = 0$. 当 $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$ 时, 由关系式:

$$\bar{\Phi}_{2t} - \bar{\Phi}_{1t} = f_1(t)\int_{z_1}^{z_2} r^{-1}\,\mathrm{d}z, \quad \bar{\Phi}_{izt} = B_i\bar{\Phi}_{it}, \quad i = 1, 2$$

得

$$f_1(t)\left(\frac{1}{r_2 B_2} - \frac{1}{r_1 B_1} - \int r^{-1}\,\mathrm{d}z\right) = 0. \tag{21}$$

由假设条件 (20), (21) 的括号内表达式不为零, 故 $f_1(t) = 0$. 于是当 B_1, B_2 中有至少有一个不是零时, 不妨设 $B_1 \neq 0$, 由 $\bar{\Phi}_{zt} = 0$, 两边关于 z 从 z_1 到 z 积分得 $\bar{\Phi}_t = \bar{\Phi}_{1t} = \bar{\Phi}_{1zt}/B_1 = 0$. 当 $B_1 = 0 = B_2$ 时, 因该模型的流函数 Φ 可以相差一个仅依赖于 t 的函数, 故我们不妨设 $\bar{\Phi}_{1t} = 0$. 证毕.

命题 2.1.3 设 $D = [-X, X] \times [y_1, y_2]$ 是周期域, 在 x 方向的周期是 $2X$. 且 f, h_1, h_2 与 x 无关, 则有关于时间守恒的纬向冲量 [7]:

$$\mathcal{M}(\Phi) = \int \rho y P \, \mathrm{d}\Omega - \int r_i y \Lambda_i \, \mathrm{d}D \Big|_{i=1}^{i=2}. \tag{22}$$

证明　由式 (16), Green 公式, 式(18) 得

$$\int \rho y P_t \, \mathrm{d}\Omega = \int [(\rho \Phi_y P y)_x - (\rho \Phi_x P y)_y + \rho \Phi_x P] \, \mathrm{d}\Omega = \int \rho \Phi_x P \, \mathrm{d}\Omega.$$

再由式 (17), 分部积分, 及 Φ 关于 x 的周期性, 得

$$\int \rho \Phi_x P \, \mathrm{d}\Omega = \int r \Phi_x \Phi_z \Big|_{i=1}^{i=2} \mathrm{d}D$$

同理由式 (19), Green 公式, 分部积分, 及 Φ 关于 x 的周期性, 得

$$\int (r_i y \Lambda_i)_t \, \mathrm{d}D = \int r_i \Phi_{ix} \Lambda_i \, \mathrm{d}D = \int r_i \Phi_{ix} \Phi_{iz} \, \mathrm{d}D, \qquad i = 1, 2.$$

综合之, 即得证.

命题 2.1.4　以下总能量关于时间是守恒的.

$$\mathcal{E}[\Phi] := \frac{1}{2} \left[\int (\rho |\nabla \Phi|^2 + r \Phi_z^2) \, \mathrm{d}\Omega - \int r_i B_i \Phi_i^2 \Big|_{i=1}^{i=2} \mathrm{d}D \right]. \tag{23}$$

证明　由分部积分,式(19),

$$\mathcal{E}_t[\Phi] = \int (\rho \nabla \Phi_t \cdot \nabla \Phi + r \Phi_{tz} \Phi_z) \, \mathrm{d}\Omega - \int r_i B_i \Phi_{it} \Phi_i \Big|_{i=1}^{i=2} \mathrm{d}D =$$
$$\int [\rho \nabla \Phi_t \cdot \nabla \Phi - \Phi (r \Phi_{tz})_z] \, \mathrm{d}\Omega + \int r_i B_i \Phi_i \Lambda_{it} \Big|_{i=1}^{i=2} \mathrm{d}D.$$

由 Green 第二公式, 式(17), (18), 得

$$\int [\nabla \Phi_t \cdot \nabla \Phi - \Phi (r \Phi_{tz})_z] \, \mathrm{d}D = -\int \Phi P_t \, \mathrm{d}D + \int_{\partial D} \Phi \Phi_{tn} \, \mathrm{d}s = -\int \Phi P_t \, \mathrm{d}D.$$

另一方面, 由式 (16), Green 公式, 式(18), 得

$$\int \Phi P_t \, \mathrm{d}D = \frac{1}{2} \int [((\Phi^2)_y P)_x - ((\Phi^2)_x P)_y] \, \mathrm{d}D = \int_{\partial D} P \Phi (\Phi_x \, \mathrm{d}x + \Phi_y \, \mathrm{d}y) = 0.$$

同理由式 (19) $\int \Phi_i \Lambda_{it} \, \mathrm{d}D = 0 \quad (i = 1, 2)$. 所以得 $\mathcal{E}_t[\Phi] = 0$.

以上讨论也适合于半径固定为 a 的球面坐标的准地转模型, 只是需要将 (x, y) 坐标改为固定半径为 a 的球面 $S = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 | x^2 + y^2 = a^2\}$ 上的坐标 (θ, φ), 这时 $J(A, B) = (A_\theta B_\varphi - A_\varphi B_\theta)/(a^2 \sin\theta)$, $\mathrm{d}D$ 改为 S 上的面积微元 $\mathrm{d}S = a^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$.

$$\nabla \Phi = (\frac{1}{a} \Phi_\theta, -\frac{1}{a \sin\theta} \Phi_\varphi), \qquad \Delta \Phi = \frac{1}{a^2 \sin\theta} (u_\theta \sin\theta)_\theta + \frac{1}{a^2 \sin^2\theta} \Phi_{\varphi\varphi}$$

最大的不同之处在于 $r(z_1) = 0$, 所以两个条件 (19) 中只有一个, 即取 $i = 2$, 且 $B_2 \leqslant 0$, 所有的表达式中都去掉带有下标 1 的项. $f = f(\theta, \varphi)$, $h_2 = h_2(\theta, \varphi)$. 因球面的边界 $\partial S = \emptyset$, 故没有对应于式 (18) 的条件. 而对应于命题 2.1.3 的为

命题 2.1.5 设 f, h_2 与 φ 无关, 则有关于时间守恒的角动量 [11]:

$$\mathcal{M}(\Phi) = \int \rho\cos(\theta) P \,\mathrm{d}\Omega - \int r_2 \cos(\theta)\Lambda_2 \,\mathrm{d}S. \tag{24}$$

正是由于 $r(z_1)=0$, 极值函数可能不是光滑函数, 对此要特别加以注意.

本文在 § 3.2 讨论球面三维准地转运动的稳定性, 有关的其他工作可参看 [21],[22].

2.2 二维准地转运动

考虑到大气常常是分层运动的, 在每层中忽略流体垂直方向的运动时, 可将三维准地转模型简化为二维 N 层模型. 有关的稳定性工作有文献 [8,23-32]. 本文方程中的矩阵 T 不限于取文献 [33] 模型中的三对角阵. 其控制方程为各层的位涡守恒:

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} + J(\Phi_i, P_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, N, \tag{25}$$

其中当 $N > 1$ 时 Φ_i 为第 i 层的流函数, 可用向量表示位涡与流函数的关系:

$$\boldsymbol{P} = \Delta\boldsymbol{\Phi} - \mathsf{FT}\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{f}(x,y), \tag{26}$$

其中 T 是 N 阶半正定的常数矩阵, $\mathsf{F} = \mathsf{K}^{-2}$ 是 N 阶正定的常数对角矩阵. 当 $N=1$ 时是单层模型, 这时, 规定 $\mathsf{F} = F \geqslant 0$, $\mathsf{T} = 1$,

考虑的区域为 § 2.1 中定义的 D. 边界条件为通常的固壁条件与环量守恒

$$\boldsymbol{\Phi}_s|_{\partial D} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\partial D_j} \boldsymbol{\Phi}_n \,\mathrm{d}s = 0, \quad j = 0, \cdots, J. \tag{27}$$

设 $\boldsymbol{G}(\cdot)$ 是任意的可微函数, 类似地有守恒量 $\int \boldsymbol{G}(\boldsymbol{P})\,\mathrm{d}D$ 及守恒的总能量:

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\Phi}) := \frac{1}{2}\int \left[|\mathsf{K}\nabla\boldsymbol{\Phi}|^2 + \boldsymbol{\Phi}^T\mathsf{T}\boldsymbol{\Phi}\right] \mathrm{d}D. \tag{28}$$

由守恒性, $\bar{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{t}} = 0$ (上横线表示在 D 上的积分平均), 由式(26), 利用 Green 公式, 得 $\mathsf{T}\bar{\boldsymbol{\Phi}}_t = 0$, 故当矩阵 T 非奇异时, 我们得守恒量 $\bar{\boldsymbol{\Phi}}$. 当矩阵 T 奇异时, 可取正交矩阵 L 使得 $\mathsf{L}^T\mathsf{K}^{-1}\mathsf{T}\mathsf{K}^{-1}\mathsf{L} = \mathsf{\Lambda}$ 是半正定的实对角阵, 且对角元素满足 $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \cdots \leqslant \lambda_N$, 作变换:

$$\boldsymbol{\Psi}' = \mathsf{L}^T\mathsf{K}\boldsymbol{\Psi}, \quad \boldsymbol{P}' = \mathsf{L}^T\mathsf{K}\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{f}' = \mathsf{L}^T\mathsf{K}\boldsymbol{f}. \tag{29}$$

则式 (26) 化为解耦的方程组

$$\boldsymbol{P}' = \Delta\boldsymbol{\Psi}' - \mathsf{\Lambda}\boldsymbol{\Psi}' + \boldsymbol{f}'. \tag{30}$$

因此, 当 $\lambda_i \neq 0$ 时, $\bar{\Psi}'_i$ 是守恒的, 当 $\lambda_i = 0$ 时, Ψ'_i 是不惟一的, 可以相差一个 t 的任意函数, 我们可以令 $\Psi'_i - \bar{\Psi}'_i$ 作为新的流函数. 因此我们总是可以假设 $\bar{\Psi}'$ 是守恒量. 在新的变量下, 能量式 (28) 可以表示成较简洁的形式:

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\Phi}) = \frac{1}{2}\int \left[|\nabla\boldsymbol{\Phi}'|^2 + \boldsymbol{\Phi}'^T\mathsf{\Lambda}\boldsymbol{\Phi}'\right] \mathrm{d}D. \tag{31}$$

类似于命题 2.1.4, 有

命题 2.2.1 设 $D := [-X, X] \times [y_1, y_2]$ 是周期域, 在 x 方向的周期是 $2X$. 且 $\boldsymbol{f}$ 与 x 无关, 则有关于时间守恒的量:

$$\mathcal{M}[\Phi] = \sum_{i=1}^{N} \int y K_i^2 P_i \,\mathrm{d}D. \tag{32}$$

3 准地转运动的稳定性

3.1 三维准地转运动的稳定性

我们要研究三维准地转运动的基本态 (Ψ, Q, Θ_i) 的非线性稳定性, (在本文中简称为稳定性). 稳定性的定义是关于初值的稳定性, 即如果 (Φ, P, Λ_i) 是与 (Ψ, Q, Θ_i) 具有不同初值的另一组解, 我们考虑扰动 $(q, \psi, \theta_i) := (\Phi, P, \Lambda_i) - (\Psi, Q, \Theta_i)$. 如果在适当定义的范数下, 对于任意范数有限的初始扰动 $(q_0, \psi_0, \theta_{i0})$ (用下标 0 表示在时刻 $t = 0$ 的量), 扰动的范数有不依赖于时间的有限上界, 且当初始扰动的模趋于零时, 这个上界也趋于零. 则称基本态 (Ψ, Q, Θ_i) 是稳定的, 否则称为是不稳定的.

现假设基本态满足性质 $\Psi = \Psi(Q, z)$, $\Psi_i = \Psi_i(\Theta_i)$, $i = 1, 2$. 其中 $\Psi(\xi, z)$, $\Psi_i(\xi)$ 连续, 关于 ξ 是全连续函数. 定义

$$\Psi^\alpha(Q; z) := \Psi + \alpha y, \quad \Psi_i^\alpha := \Psi_i + \alpha y, \quad i = 1, 2. \tag{33}$$

其中规定当命题 2.1.4 的条件假设不成立时, 取 $\alpha = 0$.

我们把各种守恒量组合起来形成以下一个守恒量:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} := {} & \mathcal{E}[\Phi] - \mathcal{E}[\Psi] - \alpha(\mathcal{M}[\Phi] - \mathcal{M}[\Psi]) + \\ & \int \rho \,\mathrm{d}\Omega \int_Q^P \Psi^\alpha(\xi, z) \,\mathrm{d}\xi - \int r_i \,\mathrm{d}D \int_{\Theta_i}^{\Lambda_i} \Psi_i^\alpha(\xi) \,\mathrm{d}\xi \Bigg|_{i=1}^{i=2} - \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z \int \Psi \psi_n \,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{34}$$

通过构造这种守恒量来得到稳定性条件的方法称为能量 -Casimir 方法 [34]. 计算得:

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}[\psi] + \int \rho \,\mathrm{d}\Omega \int_Q^P [\Psi^\alpha(\xi, z) - \Psi^\alpha(Q, z)] \,\mathrm{d}\xi - \int r_i \,\mathrm{d}D \int_{\Theta_i}^{\Lambda_i} [\Psi_i^\alpha(\xi) - \psi_i^\alpha(\Theta_i)] \,\mathrm{d}\xi \Bigg|_{i=1}^{i=2}. \tag{35}$$

可见当初始扰动趋于零时, 式 (35) 趋于零. 定义扰动位势涡度拟能及在下上底上的扰动势能分别为

$$\mathcal{Z}[\psi] := \frac{1}{2} \int \rho q^2 \,\mathrm{d}\Omega, \qquad \mathcal{P}_i[\psi] := \frac{1}{2} \int r_i \theta_i^2 \,\mathrm{d}D. \tag{36}$$

设几乎处处成立

$$(-1)^{i+1} \frac{\mathrm{d}\Psi_i^\alpha}{\mathrm{d}\Theta_i} \geqslant C_i > 0, \quad i = 1, 2, \qquad \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial Q} \geqslant C > 0. \tag{37}$$

我们再定义

$$\mathcal{W}[\psi] := C\mathcal{Z}[\psi] + C_1\mathcal{P}_1[\psi] + C_2\mathcal{P}_2[\psi]. \tag{38}$$

则由式 (35), (37) 得

$$\mathcal{A} \geqslant \mathcal{E}[\psi] + \mathcal{W}[\psi]. \tag{39}$$

若定义 $\mathcal{E}[\psi]+\mathcal{W}[\psi]$ 为扰动的范数的平方, 则我们得到了基本态是稳定的结论. 这种稳定性定理是比较简单的一种, 称为 Arnold 第一稳定性定理意义下的稳定性, 不在我们讨论的范围之内. 与式 (37) 相反地, 如有

$$(-1)^i\frac{\mathrm{d}\Psi_i^\alpha}{\mathrm{d}\Theta_i}\geqslant C_i>0,\quad i=1,2,\qquad -\frac{\partial\Psi^\alpha}{\partial Q}\geqslant C>0. \tag{40}$$

则得到

$$\mathcal{A}\leqslant\mathcal{E}[\psi]-\mathcal{W}[\psi]. \tag{41}$$

这时 $\mathcal{A}$ 不是定正或定负的, 这时基本态的稳定性的研究通常称为 Arnold 第二稳定性 [2]. 我们将扰动分解为初始扰动和相对扰动之和

$$q=q_0+q',\quad \psi=\psi_0+\psi',\quad \theta_i=\theta_{i0}+\theta_i'\quad (i=1,2), \tag{42}$$

其中带撇的量表示相对扰动的量. 可以验证

$$\overline{\psi'}=\overline{q'}=\overline{\theta_i'}=0,\quad \psi_s'|_{\partial D}=0,\quad \int_{\partial D_j}\psi_n'\,\mathrm{d}s=0, j=1,...,J. \tag{43}$$

故成立恒等式:

$$\mathcal{E}[\psi]=\mathcal{E}[\psi_0]+\mathcal{E}[\psi']-\int\rho\psi_0q'\,\mathrm{d}\Omega+\int r_i\psi_{i0}'\theta_i'\,\mathrm{d}D\Big|_{i=1}^{i=2}. \tag{44}$$

$$\mathcal{W}[\psi]=\mathcal{W}[\psi_0]+\mathcal{W}[\psi']+C\int\rho q_0q'\,\mathrm{d}\Omega+\sum_{i=1}^{2}C_i\int r_i\theta_{i0}\theta_i'\,\mathrm{d}D. \tag{45}$$

于是式 (41) 成为

$$\mathcal{H}\leqslant\mathcal{E}[\psi']-\mathcal{W}[\psi']-\int\rho(Cq_0+\psi_0)q'\,\mathrm{d}\Omega+\int r_i(\psi_{i0}-(-1)^iC_i\theta_{i0})\theta_i'\,\mathrm{d}D\Big|_{i=1}^{i=2}. \tag{46}$$

其中 $\mathcal{H}:=\mathcal{A}-\mathcal{E}[\psi_0]+\mathcal{W}[\psi_0]$ 是守恒量, 且当初始扰动趋于零时趋于零. 并且由于式 (43), (44)–(46) 的积分号中带有 0 下标的量都可改为它们各自减去在 D 上的积分平均值后的差. 这对我们在以后求更精细的界有用. 可以证明相对扰动的量满足一个称为 Poincaré 型的最佳积分不等式:

$$\mathcal{E}[\psi']\leqslant\mathcal{W}[\psi']/K,\quad K>0. \tag{47}$$

而当 $K>1$ 时应用于式 (46) 及应用 Cauchy 不等式于式 (46) 中的积分, 可得到 $\mathcal{W}[\psi']$ 的界, 再由式 (47) 可得到 $\mathcal{E}[\psi']$ 的界, 再由式 (44), (45), Cauchy 不等式可得到 $\mathcal{E}[\psi]+\mathcal{W}[\psi]$ 的界, 从而得稳定性. 用这种的方法得到的界比文献 [14] 的方法更为简洁.

为此, 考虑如下恒等式:

$$\mathcal{E}[\psi']=-\frac{1}{2}\int\rho\psi'q'\,\mathrm{d}\Omega+\frac{1}{2}\int r_i\psi_i'\theta_i'\,\mathrm{d}D\Big|_{i=1}^{i=2}. \tag{48}$$

定义

$$\mathcal{G}[\psi']:=\frac{1}{2C}\int\rho\psi'^2\,\mathrm{d}\Omega+\sum_{i=1}^{i=2}\frac{1}{2C_i}\int r_i\psi_i'^2\,\mathrm{d}D.$$

应用 Cauchy 不等式于式 (48) 得

$$\mathcal{E}^2[\psi'] \leqslant \mathcal{G}[\psi']\mathcal{W}[\psi']. \tag{49}$$

因此, 如我们能得到不等式

$$\mathcal{G}[\psi'] \leqslant \frac{\mathcal{E}[\psi']}{K}. \tag{50}$$

则由式 (49), (50) 便可推得式 (47). 为了得到式 (50), 考虑条件 (43), 如果在命题 2.1.4 的假设成立的情况下, 则应当考虑增加一个由守恒量 (24), 导出的约束条件:

$$\int \rho y q' \,\mathrm{d}\Omega - \int r_i y \theta_i' \,\mathrm{d}D \Big|_{i=1}^{i=2} = 0. \tag{51}$$

下的极值问题

$$\lambda(K) := \inf \frac{\mathcal{E}[\psi'] - \sum\limits_{i=1}^{i=2} \dfrac{K}{2C_i} \int r_i \psi'^2 \,\mathrm{d}D}{\int \rho \psi'^2 \,\mathrm{d}\Omega}. \tag{52}$$

可以证明存在 $K > 0$ 使得

$$\lambda(K) = K/C. \tag{53}$$

故式 (50) 成立. 这是由于当 $K \geqslant 0$ 时 $\lambda(K)$ 是 K 的严格递减的连续函数, 当 $K = 0$ 时, 由 $\mathcal{E}[\psi]$ 的定正性, $\lambda(0) > 0$, 当 $K \to \infty$ 时, $\lambda(K) \to \infty$, 故必存在惟一的 $K > 0$ 使得式 (51) 成立. 而要得到稳定性的关键问题是要求式 (53) 的根 $K > 1$. 但是, 由 $\lambda(K)$ 的性质, 只要

$$\lambda(1) > 1/C, \tag{54}$$

就存在式 (53) 的根 $K > 1$. 因此式 (54) 就是稳定的充分性条件.

当不考虑约束条件 (51) 时 $\lambda(1) = \lambda_0 + \mu_0(1)$, 其中

$$\lambda_0 = \inf \int \frac{|\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y}{\int u^2 \,\mathrm{d}D}, \quad \text{s.t.}\bar{u} = 0,\, u_s|_{\partial D} = 0, \tag{55}$$

$$\mu_0(1) = \inf \frac{\int r v'^2 \,\mathrm{d}z + \sum\limits_{i=1}^{i=2} \left[(-1)^{i+1} B_i - \frac{1}{C_i}\right] r_i v_i^2}{\int \rho v^2 \,\mathrm{d}z}. \tag{56}$$

注意, 在式 (51) 中没有写上条件 (43) 中最后一个环量为零的条件, 因为该条件是式 (55) 的变分问题的自然边界条件.

由变分原理, 式 (55) 的极值函数满足以下第二小的特征值 (最小特征值是零) 对应的特征函数

$$\Delta u + \lambda_0 u = 0, \quad u_s|_{\partial D} = 0, \quad \int_{\partial D_j} u_n \,\mathrm{d}s = 0 \quad (j = 1, ..., J). \tag{57}$$

式 (56) 的极值函数是以下最小特征值对应的特征函数:

$$\rho(r v')' + \mu_0(1) \rho v = 0, \quad C_i v'(z_i) = [C_i B_i + (-1)^i] v(z_i) \quad (i = 1, 2). \tag{58}$$

这时, 我们可以验证, 当取 $\phi' = uv$ 时, (47) ($K = 1$ 时) 成为等式, 故当不考虑条件 (51) 时式 (47) 是最佳不等式. 因此得到的稳定性条件在用这种能量 -Casimir 方法的情况下是最好的. 当考虑条件 (51) 时 利用命题 1.2.12, 文献 [7] 得到了较强的稳定性条件.

当 Q 是常数时, 不再存在 Ψ^α, C, 及 (40) 的第三个条件. 考虑到这时 $\bar{q}$ 和 $\overline{q^2}$ 都是守恒量. 在式 (34) 中取 $\Psi^\alpha=0$ 得

$$\mathcal{A}:=\mathcal{E}[\psi]-\int r_i\,\mathrm{d}D\int_{\Theta_i}^{\Lambda_i}[\Psi_i^\alpha(\xi)-\Psi_i^\alpha(\Theta_i)]\,\mathrm{d}\xi\Big|_{i=1}^{i=2}-\int\rho(\Psi+\alpha y)q\,\mathrm{d}\Omega.$$

两边减去守恒量 $C/2\int\rho q^2\,\mathrm{d}\Omega$, $C>0$ 可以是任意的. 设 (40) 的前二个条件成立, 则得到类似于式 (46) 的不等式:

$$\mathcal{H}\leqslant\mathcal{E}[\psi']-\mathcal{W}[\psi']-\int\rho(Cq_0+\Phi_0+\alpha y)q'\,\mathrm{d}\Omega+\int r_i(\psi_{i0}-(-1)^iC_i\theta_{i0})\theta_i'\,\mathrm{d}D\Big|_{i=1}^{i=2}.$$

其中 $\mathcal{H}:=\mathcal{A}-\mathcal{E}[\psi_0]+\mathcal{W}[\psi_0]-C/2\int\rho q^2\,\mathrm{d}\Omega+\int\rho(\Psi+\alpha y)q_0\,\mathrm{d}\Omega$ 是守恒量. 类似地可得到稳定性条件 (54), 由于 $C>0$ 的任意性, 令 $C\to\infty$, 即得稳定性条件为 $\lambda(1)>0$.

必须提及的是在满足命题 (18) 的条件下, 我们可以选取适当的 α, 使得 $\lambda(1)$ 达到最大.

三维准地转运动中 Q 是常数且满足命题 2.2.1 的一个具体模型是 Eady 模型及广义的 Eady 模型. 由于篇幅所限, 与之有关的工作可参看文献 [16–19].

3.2 球面准地转运动的稳定性

§3.1 的方法可以平行地移用到球面准地转运动的稳定性的研究. 假如要考虑的基本态满足 (40) 中去掉 $i=1$ 的条件. 且在定义 (33) 中将 y 改为 $\cos(\theta)$. 这时, 由于多了一个选择 α 的自由度, 所得的稳定性条件将比式 [22] 的更强.

对应于式 (34) 的守恒量为

$$\mathcal{A}:=\mathcal{E}[\Phi]-\mathcal{E}[\Psi]-\alpha(\mathcal{M}[\Phi]-\mathcal{M}[\Psi])+\int\rho\,\mathrm{d}\Omega\int_Q^P\Psi^\alpha(\xi,z)\,\mathrm{d}\xi-\int r_2\,\mathrm{d}S\int_{\Theta_2}^{\Lambda_2}\Psi_2^\alpha(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

类似地可得到稳定性的条件为

$$\lambda(1)>1/C,\qquad\lambda(1)=\lambda_0+\mu_0(1),\tag{59}$$

其中

$$\lambda_0:=\inf\int\frac{|\nabla u|^2\,\mathrm{d}S}{\int u^2\,\mathrm{d}S},\quad\text{s.t.}\bar{u}=0,\quad\mu_0(1):=\inf\frac{\int rv^2\,\mathrm{d}z-[B_2+\frac{1}{C_2}]r_2v_2^2}{\int\rho v^2\,\mathrm{d}z}.\tag{60}$$

注意因为球函数 $\sin\varphi\sin\theta$ 是 (60) 中第一个问题的变分方程的特征函数, 对应于特征值 $2/a^2$, 角动量 (24) 守恒对它不是一个约束, 所以在求 λ_0 时不用这个约束.

将 u 用球函数 [35] 展开可得 $\lambda_0=2/a^2$. 当 $r=Fz^2$, $F>0, z_1=0$, $\rho=1$, $B_2\leqslant 0$ 时, $\mu_0(1)$ 的值可由命题 1.2.7 得到. 从而, 稳定性条件为: 当 $1/C_2+B_2\leqslant -1/2$ 时, 稳定条件为: $2/a^2+Fz_2^2/4>1/C$; 当 $1/C_2+B_2>-1/2$ 时, 稳定条件为: $2/a^2-Fz_2^2(1/C_2+B_2)(1+1/C_2+B_2)>1/C$.

3.3 二维准地转运动的稳定性

假设 $(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{P})=(\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{Q})$ 是系统的基本态, 且 $\Psi_i+\alpha y=\Psi_i^\alpha(Q_i)$, $(i=1,...,N)$, 其中当不满足命题 2.2.1 的条件时取 $\alpha=0$. 假设存在正定对角常数矩阵 $\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}(C_1,...,C_n)>0$ 使得几乎处处成立

$$-\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}Q}\geqslant C_i>0\quad(i=1,...,N).\tag{61}$$

定义扰动 $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{q})$:

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Psi} + \psi, \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} + q, \qquad \boldsymbol{q} = \Delta\boldsymbol{\psi} - FT\boldsymbol{\psi}.$$

考虑守恒量

$$\begin{aligned}\mathcal{A} := \mathcal{E}[\boldsymbol{\Phi}] - \mathcal{E}[\boldsymbol{\Psi}] - \alpha(\mathcal{M}[\boldsymbol{\Phi}] - \mathcal{M}[\boldsymbol{\Psi}]) + \\ \sum_{i=1}^{i=n}\int K_i^2\,\mathrm{d}D\int_{Q_i}^{P_i}\Psi_i^{\alpha}(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \int (K\boldsymbol{\Psi})^T K\boldsymbol{\phi}_n\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

则

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}[\boldsymbol{\psi}] + \sum_{i=1}^{N} K_i^2 \int \mathrm{d}D \int_{Q_i}^{P_i} [\Psi_i^{\alpha}(\xi) - \Psi_i^{\alpha}(Q)]\,\mathrm{d}\xi. \tag{62}$$

由式 (61), (62) 得

$$\mathcal{A} \leqslant \mathcal{E}[\boldsymbol{\psi}] - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} C_i K_i^2 \int {q_i}^2\,\mathrm{d}D. \tag{63}$$

定义

$$\mathcal{W}[\boldsymbol{\psi}] := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} C_i K_i^2 \int {q_i}^2\,\mathrm{d}D. \tag{64}$$

类似地再作分解 $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_0 + \boldsymbol{\psi}', \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_0 + \boldsymbol{q}'$, 可见带撇的量满足条件:

$$\boldsymbol{\psi}_s'|_{\partial D} = 0, \quad \int \boldsymbol{\psi}'\,\mathrm{d}D = 0, \int_{\partial D_j} \boldsymbol{\phi}_n'\,\mathrm{d}s = 0, \quad j = 1, ..., J \quad , \int \boldsymbol{q}'\,\mathrm{d}D = 0. \tag{65}$$

类似于式 (46), (63) 可化为

$$\mathcal{H} \leqslant \mathcal{E}[\boldsymbol{\psi}'] - \mathcal{W}[\boldsymbol{\psi}'] - \int (C\boldsymbol{q}_{i0} + K\boldsymbol{\psi}_0)^T K\boldsymbol{q}'\,\mathrm{d}D, \tag{66}$$

其中 $\mathcal{H} := \mathcal{A} - \mathcal{E}[\boldsymbol{\psi}_0] + \mathcal{W}[\boldsymbol{\psi}_0]$ 是守恒量. 由式 (66) 得稳定性条件:

$$\mathcal{E}[\boldsymbol{\psi}'] < \mathcal{W}[\boldsymbol{\psi}']. \tag{67}$$

为了简化条件 (67), 作变换 (29): $\boldsymbol{p} = L^T K\boldsymbol{\psi}', \boldsymbol{b} = L^T K\boldsymbol{q}'$. 得解耦方程组 $\Delta\boldsymbol{p} - \Lambda\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}$. 这时由式 (31) 及 (64):

$$\mathcal{E}[\boldsymbol{\psi}'] = \frac{1}{2}\int[|\nabla\boldsymbol{p}|^2 + \boldsymbol{p}^T\Lambda\boldsymbol{p}]\,\mathrm{d}D, \quad \mathcal{W}[\boldsymbol{\psi}'] = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{b}^T L^T CL\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}D. \tag{68}$$

由于

$$\frac{1}{2}\int[|\nabla p_i|^2 + \lambda_i p_i^2]\,\mathrm{d}D = -\frac{1}{2}\int p_i b_i\,\mathrm{d}D. \tag{69}$$

用类似于 § 3.1 的方法, 由式 (69) 可得

$$\frac{1}{2}\int[|\nabla p_i|^2 + \lambda_i p_i^2]\,\mathrm{d}D \leqslant \frac{1}{2(\lambda_0 + \lambda_i)}\int b_i^2\,\mathrm{d}D. \tag{70}$$

其中 λ_0 由式 (55) 定义.

于是当不满足命题 2.2.1 的条件时, 可得最佳不等式

$$\mathcal{E}[\boldsymbol{\psi}'] \leqslant \frac{1}{2}\int \boldsymbol{b}^T \Lambda' \boldsymbol{b}\,\mathrm{d}D, \quad \Lambda' := \mathrm{diag}\left\{\frac{1}{\lambda_0+\lambda_i}\right\}. \tag{71}$$

记正定矩阵 $M := L\Lambda' L^T$, 比较式 (68) 的第二式与式 (71), 稳定性条件 (67) 化为

$$C - M > 0. \tag{72}$$

在此写一个矩阵 > 0 表示这矩阵是正定的. 为了应用上方便, 把稳定性条件 (72) 改写为与之等价的条件 [26] $M^{-1} - C^{-1} > 0$, 即 $\lambda_0 E + KTK - C^{-1} > 0$.

当满足命题 2.2.1 的条件时, 则 $N = 1$, 或 $N > 1$, 且向量 $(K_1, ..., K_N)$ 是 L 中的第 i 个列向量的倍数时, 还有由守恒量 (32) 得到的约束条件: $\overline{yb_i} = 0$, 这时对应的式 (70) 中的 λ_0 将更大, 因此得到的稳定性条件更强, 参见文献 [8,31].

[参 考 文 献]

[1] PEDLOSKY J. Geophysical Fluid Dynamics [M]. 2nd edit. New York: Springer, 1987.

[2] ARNOLD V I. On a priori estimate in the theory of hydrodynamical stability [J]. Izv Vys-sh Uchebn Zaved Matematika, 1966, 54: 3-5.

[3] MCINTYRE M E, SHEPHERD T G. An exact local conservation theorem for finite-amplitude disturbances to non-parallel shear flows, with remarks on Hamiltonian structure and on Arnol'd's stability theorems [J]. J Fluid Mech, 1987, 181: 527-565.

[4] MU M, WANG X Y. Nonlinear stability criteria for the motion of three-dimensional quasigeostrophic flow on a beta-plane [J]. Nonlinearity, 1992, 5: 353-371.

[5] MU M, SIMON J. A remark on nonlinear stability of three-demensional quasi-geostrophic motions [J]. Chinese Science Bulletin, 1993, 38(23): 1978-1984.

[6] LIU Y M, MU M. Nonlinear stability theorem for Eady's model of quasi-geostrophic baroclinic flow [J]. J Atmos Sci, 1996, 53: 1459-1463.

[7] LIU Y M, CAI J J. On nonlinear stability of 3D quasi-geostrophic flow [J]. Adv Atmos Sci, 2006, 23(5): 809-814.

[8] LIU Y M, LI N. Nonlinear stability theorem of zonally symmetric quasi-geostrophic flow [J]. Acta Analysis Functionalis Applicata, 2003, 5(1): 27-34.

[9] MU M, WU Y H. Arnol'd nonlinear stability theorems and their application to the atmosphere and oceans [J]. Surveys in Geosphysics, 2001, 22: 383-426.

[10] 穆穆, 季仲贞, 王斌, 李扬. 地球流体力学的研究与进展 [J]. 大气科学, 2003, 27(4): 689-711.

[11] ZENG Q C. Variational principle of instability of atmospheric motions [J]. Adv Atmos Sci, 1989, 6(2): 137-172.

[12] 伍荣生. 大气动力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.

[13] MU M, ZENG Q C. Criteria for the nonlinear stability of three-dimensional quasi-geostrophic motions [J]. Adv Atmos Sci, 1991, 8(1): 1-10.

[14] LIU Y M, MU M, SHEPHERD T G. Nonlinear stability of continuously stratified quasi-geostrophic flow [J]. J Fluid Mech, 1996, 324: 419-439.

[15] 刘永明, 穆穆, 邱令存. 纬向对称的连续层结准地转流的非线性稳定性 [J]. 自然科学进展, 2003, 13(4): 378-382.

[16] MU M, SHEPHERD T G. Nonlinear stability of Eady's model [J]. J Atmos Sci, 1994, 51: 3427-3436.

[17] LI Y, MU M, MOON S E, SOHN K T. On the linear and nonlinear stability of generalized Eady model. Part I: nonmal mode method [J]. Korean J Atmos Sci, 1998, 1: 113-118.

[18] LI Y, MU M, MOON S E, SOHN K T. On the linear and nonlinear stability of generalized Eady model. Part II: nonlinear stability theorem [J]. Korean J Atmos Sci, 1998, 1: 119-125.

[19] LIU Y M, MU M. Nonlinear stability of Generalized Eady Model [J]. J Atmos Sci, 2001, 58: 821-827.

[20] WHITE A A. Modified quasi-geostrophic equations using geometric height as vertical coordinate [J]. Q J R Met Soc, 1977, 103: 383-396.

[21] LI Y, MU M. On the nonlinear stability of three-dimensional quasigeostrophic motions in spherical geometry [J]. Adv Atmos Sci, 1996, 13(2): 203-216.

[22] CAI J J, LIU Y M. Nonlinear stability of three-dimensional quasigeostrophic motions in spherical geometry [J]. 华东师范大学学报 (自然科学版), 2007, 3: 23-30.

[23] MU M. Nonlinear stability criteria for motions of multi-layer quasigesotrophic flow [J]. Sciences in China ser B, 1991, 34: 1516-1528.

[24] LIU Y M, MU M. A problem related to nonlinear stability criteria for multi-layer quasi-geostrophic flow [J]. Adv Atmos Sci, 1992, 9(3): 337-345.

[25] MU M. Nonlinear stability of two-dimensional quasi-geostrophic motions [J]. Geophys Astrophys Fluid Dyn, 1992, 65: 57-76.

[26] LIU Y M, MU M. Arnol'd's second nonlinear stability theorem for general multilayer quasi-geophysical model [J]. Adv Atmos Sci, 1994, 11(1): 36-42.

[27] MU M, SHEPHERD T G. On Arnol'd's second nonlinear stability theorem for two-dimensional quasi-geostrophic flow [J]. Geophys Astrophys Fluid Dyn, 1994, 75: 21-37.

[28] MU M, ZENG Q C, SHEPHERD T G, LIU Y M. Nonlinear stability of multilayer quasi-geostrophic flow [J]. J Fluid Mech, 1994, 264: 165-184.

[29] LI Y, MU M. Baroclinic instability in the generalized Phillips' model. Part I: Two-layer model [J]. Adv Atmos Sci, 1996, 13(1): 33-42.

[30] Mu M. Optimality of a nonlinear stability criteria of two-layer Phillips model [J]. Chinese Science Bulletin, 1998, 43: 656-659.

[31] LIU Y M. Nonlinear stability of zonally symmetric quasi-geostrophic flow [J]. Adv Atmos Sci, 1999, 16(1): 107-118.

[32] LI Y. Baroclinic instability in the generalized Phillips' model. Part II: Three-layer model [J]. Adv Atmos Sci, 1996, 17(3): 413-432.

[33] RIPA P. Wave energy-momentum and pseudoenergy-momentum conservation for layer quasi-geostrophic instability problem [J]. J Fluid Mech, 1992, 235: 379-398.

[34] 穆穆. 大气运动非线性稳定性研究中的能量-Casimir 方法 [J]. 力学进展, 1998, 28(2): 235-249.

[35] 梁昆淼编. 数学物理方法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.