西北大学学报(自然科学版)
2004年2月,第34卷第1期,Feb.,2004,Vol.34,No.1
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)
JNWU

格化拓扑公理系统的简化

王建功

(陕西广播电视大学,陕西 西安 710068)

摘要:目的 简化格化拓扑中泛邻元系公理系统和网泛敛关系公理系统。**方法** 对照一般拓扑学中邻域系公理理论和More-smith收敛理论,构造格化拓扑中泛邻元系和网泛敛关系的最基本的条件。**结果** 泛邻元系公理系统原来的7条公理被简化成为5条,网泛敛关系公理系统原来的8条公理被简化成为5条。**结论** 泛邻元系公理系统和网泛敛关系公理系统简化后,表述更清晰,应用更方便。

关 键 词:格化拓扑;泛邻元系;网泛敛关系

中图分类号:O189.1 **文献标识码:**A **文章编号:**1000-274X(2004)01-0004-03

1 泛邻元系公理系统的简化

为了给出泛邻元系公理系统的简化,我们先介绍一些概念和记号。完备对偶格$(L,\geqslant)$的非空子集μ叫作L的一个弱滤(文献[1]中叫全像),如果$\forall\alpha,\beta\in L,\alpha\geqslant\beta$和$\beta\in\mu\Rightarrow\alpha\in\mu$。

引理1 若$(L,\geqslant)$是一个完备对偶格,$\{\mu_t:t\in T\}$是L的一族弱滤$(T\neq\varnothing)$,则$\cap\{\mu_t:t\in T\}$亦是L的一族弱滤。

记L中全体弱滤之集为$\mu(L)$。

定义1 设$(L,\geqslant)$是一个完备对偶格,称非空子集$A\subset L$是关于α的一个相对尾,如果$\forall\beta_1,\beta_2\in A$,都有

$\beta_1\Lambda\beta_2\not\leqslant\alpha\Rightarrow(\exists\beta\in A)(\beta\leqslant\beta_1,\beta\leqslant\beta_2)$。

对任一映射$q:L\to\mu(L)$,记

$Q(q)=\{\gamma\in L$:满足$(\forall\delta)(\gamma\not\leqslant\delta\Rightarrow\gamma\in q(\delta))\}$。

定义2 记

${}^qL=\{q\mid q:L\to\mu(L)$,满足条件1)~3)$\}$

其中

1) $\forall\alpha\in L-\{1\}$,$Q(q,\alpha)$是关于α的相对尾;

2) $\forall\alpha\in L,q(\alpha)\sim Q(q,\alpha)$;

3) $q(\Lambda\{\alpha_t:t\in T\})=\cup\{q(\alpha_t):t\in T\}$。

我们称$q\in{}^qL$为L上的一个泛邻元结构,$q(\alpha)$叫作α的泛邻元系。

定理1 若$q\in{}^qL$,则q满足

4) $\beta\in q(\alpha)\Rightarrow\beta\not\leqslant\alpha$。

证 明 若$\beta\in q(\alpha)$,由条件2)知,存在$\gamma\in Q(q,\alpha)$,使$\beta\geqslant\gamma$。注意$\gamma\in Q(q,\alpha)$表示$\gamma\not\leqslant\alpha$且

$(\forall\delta)(\gamma\not\leqslant\delta\Rightarrow\gamma\in q(\delta))$。

于是$\beta\geqslant\gamma\not\leqslant\alpha$,所以$\beta\not\leqslant\alpha$。

注1 条件1)~4)是文献[2]中所给泛邻元结构的公理系统。定理1表明条件1)~3)与其等价。

2 泛网敛关系公理系统的简化

文献[3]中给出网敛关系的公理系统为8条,本节给出简化系统仅为5条。

若$\omega\in\mathscr{W}$,$\omega:D\to L$。我们记

$H(\omega)=\{\delta\in L$:终有$\delta\not\leqslant\omega(\alpha)\}$。

显然$H(\omega)$是一个弱滤。

定义3 记

${}^cL=\{\downarrow:\downarrow\subset\mathscr{W}\times L$,满足①~⑤$\}$,

其中

① 若ω是常驻网$\omega(d)\equiv\alpha$,则$\omega\downarrow\alpha$;

② 若$\omega_t\downarrow\alpha(\forall t\in T)$,$H(\omega)\supset\bigcap_{t\in T}H(\omega_t)$,则$\omega\downarrow\alpha$;

收稿日期:2003-06-20

基金项目:陕西省自然科学基金资助项目(2000SL06)

作者简介:王建功(1957-),男,陕西临潼人,陕西广播电视大学副教授,从事基础数学研究。

我们称β泛罩住α,如果$\forall\omega\in\mathscr{W}$有

$\omega\downarrow\alpha\Rightarrow\beta\in H(\omega)$。

③ 若$\beta_i\not\leqslant\delta\Rightarrow\beta_i$泛罩住$\delta(i=1,2)$,则$\beta_1\wedge\beta_2\not\leqslant\delta\Rightarrow\beta_1\wedge\beta_2$泛罩住$\delta$;

④ β泛罩住$\alpha\Rightarrow(\exists\gamma)((\beta\geqslant\gamma\not\leqslant\alpha)((\forall\delta)(\gamma\not\leqslant\delta\Rightarrow\gamma$泛罩住$\delta)))$;

⑤ 若β泛罩住$\bigwedge_{t\in T}\alpha_t$,则存在$t_0\in T$,使得$\beta$泛罩住$\alpha_{t_0}$。

我们称$\downarrow\in{}^cL$为L上的一个泛网敛关系,称$\omega\downarrow\alpha$为网ω泛敛于α。

命题1 若$\downarrow\in{}^cL$,则β泛罩住$\bigwedge_{t\in T}\alpha_t\Leftrightarrow$存在$t_0\in T$,使得$\beta$泛罩住$\alpha_{t_0}$。

证 明 若存在$t_0\in T$,使得β泛罩住α_{t_0},由④,存在γ使得

$$(\beta\geqslant\gamma\not\leqslant\alpha_{t_0})((\forall\delta)(\gamma\not\leqslant\delta\Rightarrow\gamma\text{泛罩住}\delta))。\quad(1)$$

因为$\wedge\{\alpha_t:t\in T\}\leqslant\alpha_{t_0}$,所以$\gamma\not\leqslant\wedge\{\alpha_t:t\in T\}$。在式(1)中取$\delta=\wedge\{\alpha_t:t\in T\}$得$\gamma$泛罩住$\wedge\{\alpha_t:t\in T\}$。由泛罩住的定义知,$\beta$亦泛罩住$\wedge\{\alpha_t:t\in T\}$。

定理2 若$\downarrow\in{}^cL$,则$\downarrow$满足

⑥ 若$\omega_t\downarrow\alpha_t(\forall t\in T)$,$T$是定向集,$\alpha_t\downarrow\alpha$,则$\omega_\pi\downarrow\alpha$;

⑦ 若$\omega\downarrow\alpha$且$\alpha'\geqslant\alpha$,则$\omega\downarrow\alpha'$;

⑧ 若$\omega\in\mathscr{W}$的每个子网ω'均有(ω'的)子网ω'',使得$\omega''\downarrow\alpha$,则$\omega\downarrow\alpha$;

⑨ 若$\omega\downarrow\alpha$,ω'是ω的任一子网,则$\omega'\downarrow\alpha$。

证 明 我们记

$\mathscr{W}(\alpha)=\{\omega\in\mathscr{W}:\omega\downarrow\alpha\}$,

$\Gamma(\alpha)=\{\beta\in L:\beta$泛罩住$\alpha$且$(\forall\delta)(\beta\not\leqslant\delta\Rightarrow\beta$泛罩住$\delta)\}$。

则β泛罩住α等价于$\beta\in\cap\{H(\omega):\omega\in\mathscr{W}(\alpha)\}$,而④即为

$\cap\{H(\omega):\omega\in\mathscr{W}(\alpha)\}\sim\Gamma(\alpha)$。

于是

$\omega\downarrow\alpha\Leftrightarrow H(\omega)\supset\Gamma(\alpha)$。

现在来证明⑥。设$\omega_t\downarrow\alpha_t(\forall t\in T)$且$\alpha_t\downarrow\alpha$,其中$T$是定向集,$\omega_t:D_t\to L$。需证$\omega_\pi\downarrow\alpha$。任给$\gamma\in\Gamma(\alpha)$,由$\alpha_t\downarrow\alpha$得,存在$t_0\in T$,当$t\leqslant t_0$时,恒有$\gamma\not\leqslant\alpha_t$。于是$\gamma$泛罩住$\alpha_t(\forall t\leqslant t_0)$。因为$\omega_t\downarrow\alpha_t$,所以存在$d_t^*\in D_t$,当$d_t\leqslant d_t^*(d_t\in D_t)$时,恒有$\gamma\not\leqslant\omega_t(d_t)$。在$\pi=(\prod_{t\in T}D_t)\times T$中取定元素$(f_0,t_0)$,其中

$$f_0(t)=\begin{cases}d_t^*, & \text{当}t\leqslant t_0\text{时};\\ D_t\text{中任一点}, & \text{当}t\not\leqslant t_0\text{时}。\end{cases}$$

则$\forall(f,t)\in\pi$,若$(f,t)\leqslant(f_0,t_0)$,就有$t\leqslant t_0$及

$f(t)\leqslant f_0(t)=d_t^*$,此处$f(t)\in D_t$。

所以

$\gamma\not\leqslant\omega_t(f(t))=\omega_\pi(f,t)$。

因此$H(\omega_\pi)\supset\Gamma(\alpha)$,等价地也有$\omega_\pi\downarrow\alpha$。⑥得证。

若$\alpha'\geqslant\alpha$,则$\alpha'\wedge\alpha=\alpha$,由命题1得

$\cap\{H(\omega):\omega\in\mathscr{W}(\alpha)\}=\cap\{H(\omega):\omega\in\mathscr{W}(\alpha'\wedge\alpha)\}=(\cap\{H(\omega):\omega\in\mathscr{W}(\alpha)\})\cup(\cap\{H(\omega):\omega\in\mathscr{W}(\alpha')\})$。

所以

$\cap\{H(\omega):\omega\in\mathscr{W}(\alpha)\}\supset\cap\{H(\omega):\omega\in\mathscr{W}(\alpha')\}$。

如果$\omega\downarrow\alpha$,则

$H(\omega)\supset\cap\{H(\omega):\omega\in\mathscr{W}(\alpha)\}\supset\cap\{H(\omega):\omega\in\mathscr{W}(\alpha')\}$。

由②得$\omega\downarrow\alpha'$。⑦得证。

我们用反证法来证⑧。如果存在$\omega\in\mathscr{W}$,满足:ω的任一子网ω'都有(ω'的)一个子网ω''使得$\omega''\downarrow\alpha$,但是$\omega\downarrow\alpha$不成立。由②知

$H(\omega)\not\supset\cap\{H(\omega):\omega\in\mathscr{W}(\alpha)\}$。

于是存在$\beta_0\in\cap\{H(\omega):\omega\in\mathscr{W}(\alpha)\}$,但是$\beta_0\notin H(\omega)$。后一条件表明

$(\forall d\in D)(\exists d'\in D)(d'\leqslant d$且$\beta_0\leqslant\omega(d'))$。

令 $D'=\{d\in D:\beta_0\leqslant\omega(\alpha)\}$。

显然,D'是D的一个子定向集,所以$\omega'=\omega\mid D'$是ω的一个子网。我们来证ω'的任一子网ω'',使$\omega''\downarrow\alpha$不成立。如果ω'有子网ω'',使$\omega''\downarrow\alpha$,则$\omega''\in\mathscr{W}(\alpha)$。由此得

$H(\omega'')\supset\cap\{H(\omega):\omega\in\mathscr{W}(\alpha)\}$。

所以 $\beta_0\in H(\omega'')$。 (2)

设ω''使如下构成的

$\omega''=\omega'\cdot N$,

$N:D''\to D'$,使得

$(\forall d\in D')(\exists d_0''\in D'')((\forall d''\in D'')(d''\leqslant d_0''\Rightarrow N(d'')\leqslant d))$。

由式(2)得,存在$d''\in D''$使得

$\beta_0\not\leqslant\omega'(N(d''))=\omega''(d'')$。

注意$N(D'')\in D'$。这与$(\forall d'\in D')(\beta_0\leqslant\omega'(d'))$矛盾。⑧得证。

若ω'是ω的子网,显然有$H(\omega')\supset H(\omega)$。如果$\omega\downarrow\alpha$,由②得$\omega'\downarrow\alpha$。⑨得证。

注2 应该注意,⑨仅由②推得。在定理3的证明中利用了这一结果。

定理3 若$\downarrow\subset\mathscr{W}\times L$满足①~③,⑤~⑦

则 $\searrow$ 满足④,即

β 泛罩住 $\alpha \Rightarrow (\exists\gamma)((\beta \geqslant \gamma \not\leqslant \alpha)(\forall\delta)(\gamma \not\leqslant \delta \Rightarrow \gamma$ 泛罩住 $\delta))$。

证 明 由注2知 $\searrow$ 还满足⑨。下面我们多次利用⑨。

"泛罩住"有下列简单性质:

i) $\forall\beta \in L$,β 不能泛罩住 β。

因为由①知常驻网 $\omega(d) \equiv \beta$ 满足 $\omega \searrow \beta$。

ii) 若 $\beta \geqslant \gamma$ 且 γ 泛罩住 α,则 β 亦泛罩住 α。

iii) 若 $\alpha' \geqslant \alpha$ 且 β 泛罩住 α',则 β 亦泛罩住 α;这等价于:β 不能泛罩住 α,则 β 亦不能泛罩住 α'。这是⑦的推论。

若 β 泛罩住 α,令

$C = \{\delta:\beta$ 不能泛罩住 $\delta\}$。

由 i 知 $\beta \in C$。我们记

$\gamma = \wedge\{\delta:\delta \in C\}$,

则 γ 有下列性质:

A) $\gamma \leqslant \beta$。

因为 $\beta \in C$。

B) β 不能泛罩住 γ,则 $\gamma \in C$。

因为若 β 泛罩住 γ,由⑤知存在 $\delta_0 \in C$,使 β 泛罩住 δ_0。这不可能。

上述性质说明 γ 是 C 中最小元。于是有

C) $\forall\delta \in L$,$\gamma \not\leqslant \delta \Rightarrow \beta$ 泛罩住 δ。

D) $\gamma \not\leqslant \alpha$。

事实上,如果 $\gamma \leqslant \alpha$,则因为 β 泛罩住 α,由 iii) 和 A) 得 β 泛罩住 γ。这与 B) 矛盾。

由 A) 和 D) 知 $\beta \geqslant \gamma \not\leqslant \alpha$。剩下只需证明

$(\forall\delta)(\gamma \not\leqslant \delta \Rightarrow \gamma$ 泛罩住 $\delta)$。

用反证法。如果 γ 不能泛罩住 δ,则存在网 $\omega_0 \searrow \alpha$,但常有 $\gamma \leqslant \omega_0(d)$ $(d \in D_0$,D_0 是 ω_0 的定义域)。

令 $T = \{d \in D_0:\gamma \leqslant \omega_0(\alpha)\}$,

则 $\omega = \omega_0 \mid D_0$ 是 ω_0 的子网,满足 $\gamma \leqslant \omega(t)$ $(\forall t \in T)$。由⑨知 $\omega \searrow \delta$。

对于固定的 $t \in T$,$\omega(t)$ 有两种可能:

a) $\omega(t) \geqslant \beta$。

此时取常驻网 $\omega_t(d) = \omega(t)$ $(d \in D_t)$。由①知 $\omega_t \searrow \omega(t)$。

b) $\omega(t) \geqslant \gamma$ 但 $\beta \not\leqslant \omega(t)$。

由 iii) 知,此时 β 不能泛罩住 $\omega(t)$。易知存在网 $\omega_t:D_t \to L$ 满足 $\omega_t \searrow \omega(t)$ 且 $\forall d \in D_t$ 有 $\beta \leqslant \omega_t(d)$。

注意到 $\forall t \in T$,$\omega_t \searrow \omega(t)$,而 $\omega(t) \searrow \delta$。由⑥得 $\omega_\pi \searrow \delta$,这儿 $\omega_\pi:(\prod_{t\in T} D_t) \times T \to L$。根据 ω_π 的构造,我们知道 $\forall (f,t) \in (\prod_{t\in T} D_t) \times T$,恒有

$\omega_\pi(f,t) = \omega_t(f(t)) \geqslant \beta$。

于是,β 不是泛罩住 δ。另一方面,因为 $\gamma \not\leqslant \delta$,由 C) 知 β 泛罩住 δ。这便与其矛盾。

注3 文献[3]中所给网泛敛关系公理系统是①~③,⑤~⑨共8条。我们的定理2和定理3表明①~⑤与其等价,所以我们的定义2是网泛敛公理系统的简化。

注4 ③和⑨是①~③,⑤~⑦的推论,因而文献[3]中网泛敛公理系统不独立。

注5 按照我们的定义2,网泛敛不惟一性是①~⑤的推论。

参考文献:

[1] 汪培庄. 格拓扑的邻元结构与收敛关系[J]. 北京师范大学学报(自然科学版),1984,(2):19-34.

[2] 汪培庄. 模糊集与随机集落影[M]. 北京:北京师范大学出版社,1985.

[3] 苏秀雯. 格上泛收敛关系的公理刻划及其与泛邻元系之间的等价性[J]. 工程数学学报,1984,1(1):69-75.

(编 辑 亢小玉)

The simplification of axiomatical systems of lattice topology

WANG Jian-gong

(Shaanxi Radio and TV University, Xi'an 710068, China)

Abstract: Aim To simplify the axiomatical system of the pan-neighbourhood system and the net pan-convergence relation. **Methods** To build up the basic conditions of the pan-neighborhood system and the net pan-convergence relation of lattice topology against the axiomatical theory of the neighbourhood system and the theory of the More-smith convergence of general topologies. **Results** The seven axioms on the pan-neighborhood system and the eight axioms on the net pan-convergence relation are simplified to the five axioms respectively. **Conclusion** After the axiomatical system of the pan-neighbourhood system and the net pan-convergence are simplified, a clearer demonstration and a more convenient appliance will be shown.

Key words: lattice topology; the pan-neighborhood system; the net pan-convergence relation