关于 n 进制中数字之和函数均值的计算

杨倩丽，李海龙

(渭南师范学院 数学系，陕西 渭南 714000)

摘要：设 $N=a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}+\cdots+a_sn^{k_s}(1\leqslant a_i<n,\ i=1,2,\cdots,s;\quad k_1>k_2>\cdots>k_s\geqslant 0)$，$a(m,n)=a_1+a_2+\cdots+a_s$，$A_k(N,n)=\sum\limits_{m<N}a^k(m,n)$，给出了 $A_K(N,n)(k=1,2)$ 的精确计算公式。

关 键 词：n 进制；数字之和函数；均值

中图分类号：O516.4　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-274X(2002)04-0361-02

文献[1]给出了 $A_1(N,n)$ 的精确的计算公式。本文推出了 $A_2(N,n)$ 的精确的计算公式。为了叙述方便，引用下列记号

$$\varphi_k(n)=\sum_{i=1}^{n-1}i^k;$$

$$\varphi_1(n)=\frac{n(n-1)}{2};$$

$$\varphi_2(n)=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

定　义[2]　设 $n(n\geqslant 2)$ 为一给定的正整数，对任一正整数 m，假定 m 在 n 进制中表示为

$$m=a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}+\cdots+a_sn^{k_s}.$$

记

$$a(m,n)=a_1+a_2+\cdots+a_s,$$

令　$A_k(N,n)=\sum\limits_{m<N}a^k(m,n)$，$k=1,2$；　k_i 为正整数 $i=1,2,\cdots,s$[3]。

定理 1[1]　设　$N=a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}+\cdots+a_sn^{k_s}$，其中：$1\leqslant a_i<n$，　$i=1,2,\cdots,s$；　$k_1>k_2>\cdots>k_s\geqslant 0$，则

$$A_1(N,N)=\sum_{i=1}^{s}\Big(\frac{n-1}{2}k_i+\sum_{j=1}^{i}a_j-\frac{a_i+1}{2}\Big)a_in^{k_i}.$$

定理 2　设 $N=a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}+\cdots+a_sn^{k_s}$，其中：$1\leqslant a_i<n$，　$i=1,2,\cdots,s$；　$k_1>k_2>\cdots>k_s\geqslant 0$，则

$$\begin{aligned}A_2(N,n)=\sum_{i=1}^{s}\{&a_ik_i\varphi_2(n)+n\varphi(a_i)+\\&(n-1)\varphi_1(k_i)\varphi_1(n)+2k_i\varphi_1(a_i)\varphi_1(n)+\\&2[a_ik_i\varphi_1(n)+n\varphi_1(a_i)]\cdot\\&\sum_{j=1}^{i-1}a_j+na_i(\sum_{j=1}^{i-1}a_j)^2\}n^{k_i-1}.\end{aligned}$$

推论 1　设　$N=2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_s}$，$k_1>k_2>\cdots>k_s\geqslant 0$，则

$$\begin{aligned}A_2(N,2)=\sum_{i=1}^{s}[&k_i(k_i+1)+4(i-1)k_i+\\&4(i-1)^2]n^{k_i-2}.\end{aligned}$$

推论 2　设 $N=a_110^{k_1}+a_210^{k_2}+\cdots+a_s10^{k_s}$，其中：$1\leqslant a_i<n$，　$i=1,2\cdots,n$，　$k_1>k_2>\cdots>k_s\geqslant 0$，则

$$\begin{aligned}A_2(N,10)=\sum_{i=1}^{s}\{&10\varphi_2(a_i)+405\varphi_1(k_i)+\\&90k_i\varphi_1(a_i)+285a_ik_i+[90a_ik_i+\\&20\varphi_1(a_i)]\sum_{j=1}^{i-1}a_j+10a_i(\sum_{j=1}^{i-1}a_j)^2\}n^{k_i-1}.\end{aligned}$$

下面证明定理 2，首先引入 2 个引理。

引理 1　$A_2(n^k,n)=$

$$[k\varphi_2(n)+(n-1)\varphi_1(n)\varphi_1(k)]n^{k-1}.\qquad(1)$$

证　明　$k=1$ 时，

$$\begin{aligned}\text{左边}=A_2(n,n)=&a^2(1,n)+\\&a^2(2-1,n)+\cdots+a^2(n-1,n)=\\&1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\varphi_2(n);\end{aligned}$$

收稿日期：2001-06-19

基金项目：陕西省自然科学基金资助项目(2000SL05)；渭南师范学院基金资助项目(01YKS017)

作者简介：杨倩丽(1964-)，女，陕西大荔人，渭南师范学院讲师，从事数论和代数研究。

右边 $=[\varphi_2(n)+\varphi_1(n)\cdot 0\cdot(n-1)]n^0=\varphi_2(n)$。

命题成立。

左边 $=A_2(n,n)=a^2(1,n)+a^2(2-1,n)+\cdots+a^2(n-1,n)=1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\varphi_2(n)$;

右边 $=[\varphi_2(n)+\varphi_1(n)\cdot 0\cdot(n-1)]n^0=\varphi_2(n)$。

命题成立。

假设 $k=p$ 时命题成立,即

$$A_2(n^p,n)=[p\varphi_2(n)+\varphi_2(n)\varphi_1(p)(n-1)]n^{p-1};$$

$$\begin{aligned}A_2(n^{p+1},n)=&\sum_{m<n^{p+1}}a^2(m,n)=\\&\sum_{m<n^p}a^2(m,n)+\sum_{n^p\leqslant m<2n^p}a^2(m,n)+\cdots\\&+\sum_{(n-1)n^p\leqslant m<n^{p+1}}a^2(m,n)=\\&\sum_{m<n^p}a^2(m,n)+\sum_{0\leqslant m<n^p}a^2(m+n^p,n)+\\&\cdots+\sum_{0\leqslant m<n^p}a^2[m+(n-1)n^p,n]=\\&\sum_{m<n^p}a^2(m,n)+\sum_{0\leqslant m<n^p}[a(m,n)+1]^2+\\&\cdots+\sum_{0\leqslant m<n^p}[a(m,n)+(n-1)]^2=\\&n\sum_{m<n^p}a^2(m,n)+2(1+2+\\&\cdots n-1)\sum_{m<n^p}a(m,n)+[1^2+2^2+\\&\cdots+(n-1)^2]n^p=nA_2(n^p,n)+\\&2\varphi_1(n)A_1(n^p,n)+\varphi_2(n)n^p。\end{aligned}$$

由假设与定理 1 得

$$\begin{aligned}A_2(n^{p+1},n)=&\\&[p\varphi_2(n)+\varphi_1(n)\varphi_1(p)(n-1)]n^p+\\&2\varphi_1(n)\frac{n-1}{2}pn^p+\varphi_2(n)n^p=\\&[(p+1)\varphi_2(n)+(n-1)\varphi_1(n)\cdot\\&\varphi_1(p+1))]n^p。\end{aligned}$$

所以 $k=p+1$ 成立,等式命题成立。 □

引理 2 　$A_2(an^k,n)=[ka\varphi_2(n)+n\varphi_2(a)+(n-1)\varphi_1(n)\varphi_1(k)+2k\varphi_1(n)\varphi_1(a)]n^{k-1}$, (2)

其中 a 为自然数。

证　明

$$\begin{aligned}A_2(an^k,n)=&\sum_{m<an^k}a^2(m,n)=\\&\sum_{m<n^k}a^2(m,n)+\sum_{n^k\leqslant m<2n^k}a^2(m,n)+\\&\cdots+\sum_{(a-1)n^k\leqslant m<an^k}a^2(m,n)=\\&\sum_{m<n^k}a^2(m,n)+\sum_{0\leqslant m<n^k}[a(m,n)+1]^2\cdot\\&\sum_{0\leqslant m<n^k}[a(m,n)+(a-1)]^2=\\&a\sum_{m<n^k}a^2(m,n)+2[1+2+\cdots+a-1]\\&\sum_{m<n^k}a(m,n)+(1^2+2^2+\cdots+(a-1)^2)n^k=\\&aA_2(n^k,n)+2\varphi_1(a)A_1(n^k,n)+\varphi_2(a)n^k。\end{aligned}$$

由式(1)和定理 1 得

$$\begin{aligned}A_2(an^k,n)=&a[k\varphi_2(n)+(n-1)\varphi_1(n)\cdot\\&\varphi_1(k)n^{k-1}+2\varphi_1(a)\frac{n-1}{2}kn^k=\\&[ka\varphi_2(n)+n\varphi_2(a)+(n-1)\varphi_1(n)\cdot\\&\varphi_1(k)+2k\varphi_1(a)\varphi_1(n)]n^{k-1}。\end{aligned}$$ □

有了以上 2 个引理,容易给出定理 2 的证明,事实我们有

$$\begin{aligned}A_2(N,n)=&\sum_{m<n}a^2(m,n)=\\&\sum_{m<a_1n^{k_1}}a^2(m,n)+\sum_{a_1n^{k_1}\leqslant m<a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}}a^2(m,n)+\\&\cdots+\sum_{N-a_sn^{k_s}\leqslant m<N}a^2(m,n)=\\&\sum_{m<a_1n^{k_1}}a^2(m,n)+\sum_{0\leqslant m<a_2n^{k_2}}[a(m,n)+a_1]^2+\\&\cdots+\sum_{0\leqslant m<a_sn^{k_s}}[a(m,n)+\sum_{i=1}^{s-1}a_i]^2=\\&\sum_{i=1}^{s}A_2(a_in^{k_i})+\sum_{i=1}^{s}2(\sum_{j=1}^{i-1}a_j)\cdot\\&A_1(a_in^{k_i})+\sum_{i=1}^{s}(\sum_{j=1}^{i-1}a_j)^2a_in^{k_i}。\end{aligned}$$

由定理 1 和式(2)得

$$\begin{aligned}A_2(N,n)=&\sum_{i=1}^{s}[k_ia_i\varphi_2(n)+n\varphi_2(a_i)+\\&(n-1)\varphi_1(n)\varphi_1(k_i)+2k_i\varphi_1(n)\varphi_1(a_i)]n^{k_i-1}+\\&\sum_{i=1}^{s}\{2(\sum_{j=1}^{i-1}a_j)\frac{a_i}{2}[(n-1)k_i+\\&(a_i-1)]+a_i(\sum_{j=1}^{i-1}a_j)^2\}n^{k_i}=\\&\sum_{i=1}^{s}\{k_ia_i\varphi_2(n)+n\varphi_2(a_i)+\\&(n-1)\varphi_1(n)\varphi_1(k_i)+2k_i\varphi_1(a_i)\varphi_1(n)+\\&2[a_ik_i\varphi_1(n)+n\varphi_1(a_i)]\cdot\end{aligned}$$

(下转第 366 页)