2002 年 8 月
第 32 卷第 4 期

西北大学学报(自然科学版)
Journal of Northwest University(Natural Science Edition)

Aug. 2002
Vol. 32 No. 4

关于混沌动力系统的一个讨论

屈汉章[1],宋国乡[2]

(1. 西安邮电学院 信息和自动控制系,陕西 西安 710061;2. 西安电子科技大学 应用数学系,陕西 西安 710071)

摘要:主要讨论了混沌动力系统的一些性质,分别得到了混沌动力系统中周期点构成的集合和非周期点构成的集合都是其映射的不变集合,得到了其映射不可能是压缩映射。

关 键 词:混沌动力系统;周期点;轨道

中图分类号:O192 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-274X(2002)04-0355-02

1 混沌动力系统

定义 1 (X,d) 是一个完备的度量空间,$f:X\to X$ 是一个连续映射,则 (X,f) 称为一个动力系统。

对于 $x\in X$,若存在正整数 n,使得 $x=f^n(x)(f(x))=f^{-1}(x),f^n(x)=f^{n-1}(f(x)))$,且对任意的正整数 $k<n,f^k(x)\neq x$,则称 x 为动力系统 (X,f) 的周期点。

若 $x\in X,\{x,f(x),f^2(x),\cdots,f^n(x),\cdots\}$ 称为 x 的轨道。周期点的轨道称为周期轨道。

定义 2 (X,f) 是一个动力系统。若对 (X,d) 任意的开集 $U,V,U\cap V=\varnothing$,存在正数 n 使得 $U\cap f^n(V)=\varnothing$,则称动力系统 (X,f) 是传递的。

定义 3 对动力系统 (X,f),若存在正数 $\delta>0$,使得对所有的 $x\in X$ 及任意正数 ε,存在 $y\in B(x,\varepsilon)$ 与正整数 n,使得 $d(f^n(x),f^n(y))>\delta$,则称动力系统 (X,f) 对于初始条件是敏感的。

定义 4 若动力系统 (X,f) 是传递的,且对于初始条件是敏感的,同时 (X,f) 的周期点构成的集合在 (X,d) 是稠密的,则称动力系统 (X,f) 是一个混沌动力系统。

注 记 1) 对于混沌动力系统 (X,f),若将定义 2 中的 $U\cap V=\varnothing$ 这一要求去掉,则存在 (X,d) 的开集 U,V,使得 $U\cap f^n(V)=\varnothing$ 成立的正整数 n,不一定存在。例如,我们可取 $U=V=X(X\neq\varnothing)$,则对任意的整数 $n,U\cap f^n(V)\neq\varnothing$。

2) 对于混沌动力系统 (X,f),若将定义 2 中的 $U\cap V=\varnothing$ 这一要求改为 $U\neq V$,则当 (X,f) 至少有一个非周期点时,存在 (X,d) 的开集 U,V,使得 $U\cap f^n(V)=\varnothing$ 成立的正整数 n,不一定存在。例如,可取 $U=X(X\neq\varnothing),V=X-\{y\}$(设 (X,f) 有一个非周期点 y),$U\neq V$。由于 (X,f) 的周期点构成的集合在 (X,d) 中是稠密的,则存在 (X,f) 的周期点 z。根据后面的讨论知 f 将周期点映成周期点,则对任意的整数 $n,z\in U\cap f^n(V)\neq\varnothing$。

由以上可知,定义 2 中的 $U\cap V=\varnothing$ 这一要求是不能在改成较弱的条件的。若更改它变弱,则存在 (X,d) 的开集 U,V,使得 $U\cap f^n(V)=\varnothing$ 成立的正整数 n,不一定存在。

2 混沌动力系统的一些性质

根据混沌动力系统的定义,有以下定理。

定理 1 (X,f) 是传递的。对任意的 $x\in X$,则 $x\in\overline{\{f(x),\cdots,f^n(x),\cdots\}}$。

证 明 任取 $x\in X$。若它是周期点,则存在正整数 k,使得 $x=f^k(x)$。从而有 $\overline{\{f(x),\cdots,f^n(x),\cdots\}}=\overline{\{f(x),\cdots,f^k(x)=x\}}=\{x,f(x),\cdots,f^{k-1}(x)\}$,即 $X\in\overline{\{f(x),\cdots,f^n(x),\cdots\}}$。

若它是非周期点,对于任意正整数 k,取 $U_k=\{y,y\in X,d(x,y)>2^{-k}\},V_k=\{y,y\in X,d(x,y)<2^{-k}\}$。

收稿日期:2000-01-09

基金项目:国家自然科学基金资助项目(59477004)

作者简介:屈汉章(1956-),男,陕西西安人,西安邮电学院讲师,从事小波分析方面的研究。

根据$\{X,f\}$的传递性，对于$k_1=1$，则存在正整数n，使得$U_1\cap f^n(V_1)=\varnothing$。设$n_1$是满足前面条件的正整数中最小的正整数，则存在正整数$k_2>1$，对于k_2，存在正整数$n>n_1$，使得$U_{k_2}\cap f^n(V_{k_2})=\varnothing$。若否，则对任意的正整数$k$，满足条件$U_k\cap f^n(V_k)=\varnothing$的正整数$n\leqslant n_1$。根据定义知满足前面条件的正整数是存在的。则存在正整数$n_0\leqslant n_1$及$k_1<k_2<\cdots<k_i<\cdots$，使得对任意的$i$，$U_{k_i}\cap f^{n_0}(V_{k_i})=\varnothing$。由于$f^{n_0}(V_{k_i})\subset V_{k_i}$，$d(x,f^{n_0}(V_{k_i}))\leqslant 2^{-k_i}$，则任取$x_i\in f^{n_0}(V_{k_i})$，$\lim\limits_{i\to\infty}x_i=x$。由于$f^{n_0}(x)\in f^{n_0}(V_{k_i})$，则$f^{n_0}(x)\in\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}f^{n_0}(V_{k_i})$。取$x_i=f^{n_0}(x)$，则$x=f^{n_0}(x)$。与$x$是非周期点矛盾。

取n_2为满足前面条件的最小的正整数。$n_1<n_2$。假定对于$l\leqslant i$，k_l,n_l已取定。根据前面的讨论，则存在k_{i+1},n_{i+1}使得$k_1<k_2<\cdots<k_i<k_{i+1}$，$n_1<n_2<\cdots<n_i<n_{i+1}$，$U_{k_{i+1}}\cap f^{n_{i+1}}(V_{k_{i+1}})=\varnothing$。由于$f^{n_i}(V_{k_i})\subset V_{k_i}\subset V_{k_i}$，$d(x,f^{n_i}(V_{k_i}))\leqslant 2^{-k_i}$，则任取$x_i\in f^{n_0}(V_{k_i})$，$\lim\limits_{i\to\infty}x_i=x$。由于$f^{n_i}(x)\in f_{n_i}(V_{k_i})$，则$\lim\limits_{i\to\infty}f_{n^i}(x)=x$。即$x\in\overline{\{f(x),\cdots,f^n(x),\cdots\}}$。 □

由以上定理可得以下定理。

定理 2　(X,f)是传递。则f将(X,f)的周期点映成周期点，非周期点映成非周期点。即周期点构成的集合，非周期点构成的集合在映射f下是不变的集合。

证　明　任取$x\in X$。若它是周期点，则存在正整数k，使得$x=f^k(x)$。则$f^k(f(x))=f^{k+1}(x)=f^{k+1}(x)=f(f^k(x))=f(x)$。即$f(x)$是一个周期点。

若x是一个非周期点。若$f(x)$是一个周期点，则存在正整数k，使得$f(x)=f^k(f(x))$。由于x不是一个周期点，则对$i=1,\cdots,k,k+1$，$x\neq f^i(x)$。由于$\overline{\{f(x),\cdots,f^n(x),\cdots\}}=\overline{\{f(x),\cdots,f^k(x),f^{k+1}(x)\}}=\{f(x),\cdots,f^k(x)\}$，则

$$x\in\overline{\{f(x),\cdots,f^n(x),\cdots\}}^{[1]}。$$

与定理 1 矛盾，即$f(x)$不可能是一个周期点，而是一个非周期点。 □

下面讨论周期点和非周期点的性质。

定理 3　(X,f)是传递的。对任意的$x\in X$，x是周期点的充要条件是x的轨道集合至少有一个孤立点；x是非周期点的充要条件是x的轨道集合至少有一个极限点。从而可得，若x的轨道集合有一个孤立点，则它的每一个点都是孤立点；若x的轨道集合有一个极限点，则它的每一个点都是极限点。

证　明　若x是周期点，则它的轨道的每一个点都是孤立点。

下来证明，若x的轨道有一个孤立点，则x是周期点。

若否，对任意的正整数n,l，$x\neq f^n(x)$，$f^n(x)\neq f^{n+l}(x)$。因为若有$x=f^n(x)$或$f^n(x)=f^{n+l}(x)$，由定理 2 知x是周期点。由已知条件，则存在一个正整数k，正数δ，使得$d(f^k(x),\{x,f(x),\cdots,f^{k-1}(x),f^{k+1}(x),\cdots\})>\delta$。则

$$d(f^k(x),\{f^{k+1}(x),\cdots,f^{k+1}(x),\cdots\})>\delta。$$

从而有$f^k(x)\notin\overline{\{f^{k+1}(x),\cdots,f^{k+1}(x),\cdots\}}$。由于$\{f^{k+1}(x),\cdots,f^{k+1}(x),\cdots\}$是$f^k(x)$的轨道，根据定理 1，应有$f^k(x)\in\overline{\{f^{k+1}(x),\cdots,f^n(x),\cdots\}}$。则矛盾。

由于x是周期点，则x的轨道中每一个点都是孤立点。

若x是非周期点，根据定理 1、定理 2，则它的轨道的每一个点都是极限点。反之，若x的轨道有一个极限点，则存在正整数l及一列正整数$\{n_k;k\in N\}$，使得$l<n_k(k\in N)$，$k_1\neq k_2$，$f^n_{k_1}(x)\neq f^n_{k_2}(x)$，$\lim\limits_{k\to\infty}f^{n_k}(x)=f^l(x)$。根据关于周期点的证明我们知道若$f^l(x)$是周期点，$f^l(x)$必是孤立点。故$f^l(x)$是非周期点。据定理 2 知，$x$是非周期点。据定理 1 知，$x$的轨道中每一个点都是极限点。 □

3　‘对于初始条件的敏感性’的讨论

(X,d)是一个完备的距离空间。$f:X\to X$是一个单值映射。$x\in X$，如果对于任意的$\epsilon>0$，存在$\delta>0$，当$d(y,x)<\delta$时，使得对任意的正整数n，$d(f^n(y),f^n(x))<\epsilon$，则称映射族$\{f,f^2,\cdots,f^n,\cdots\}$在$x$处是等度连续的[1]。

根据上面的定义可得映射族$\{f,f^2,\cdots,f^n,\cdots\}$在$x$处非等度连续的定义。$x\in X$，如果存在$\epsilon_0(x)>$，对任意的$\delta>0$，存在$y\in X$及正整数$n$，使得$d(y,x)<\delta$，$d(f^n(y),f^n(x))\geqslant\epsilon_0(x)$，则称映射族$\{f,f^2,\cdots,f^n,\cdots\}$在$x$处非等度连续的。

若映射族$\{f,f^2,\cdots,f^n,\cdots\}$在$X$的每一个点上都是非等度连续的，从非等度连续的定义看出，对于不同的$x\in X$，$\epsilon_0(x)$一般不会是相同的。则$\{\epsilon_0(x);x\in X\}$构成一数集。如果$\inf\{\epsilon_0(x);x\in X\}>0$，即该数集有大于零的下界，则称映射族$\{f,f^2,\cdots,f^n,\cdots\}$在$X$上

(下转第 360 页)

参考文献:

[1] CONNELL I G. On the group ring[J]. Canad J Math, 1963, 15: 650-685.

[2] OKNINSKI J. Artinian semigroup rings[J]. Comm Alg, 1982, 10: 109-114.

[3] JESPERS, E. , Ω-krull rings and skew semigroup rings[J]. Comm, Alg. 1984, 12: 348-376.

[4] CLIFFORD A H, PRESTON G B. The Algebraic Theory of Semigroups[M]. Providence: Amer Math Soc, 1961.

(编 辑 曹大刚)

Artinian skew semigroup ring

TIAN Jun-hua

(Department of Computer Sicence, Xianyang Normal Collge, Xianyang 712000, China)

Abstract: The necessary and sufficient condition satisfied by a ring R and a semigroups S is discussed when skew semigroup rings $R_\theta^* S$ is artinian. Thus, all results extend I. G. Connell's and J. Okninski's results.

Key words: skew semigroup ring; skew group ring; artintian ring; group ring; semigroup ring

(上接第 356 页)

是一致非等度连续的。

对照混沌动力系统关于初始条件是敏感的定义,可得以下定理。

定理 4 (X,f) 是一个动力系统,则 (X,f) 关于初始条件是敏感的充要条件是映射族 $\{f,f^2,\cdots,f^n,\cdots\}$ 在 X 上是一致非等度连续的。

定理 5 (X,f) 是一个动力系统。若对 $x\in X$,存在 $\delta_0>0$,使得当 $d(y,x)<\delta_0$ 时, $d(f(y),f(x))\leqslant d(y,x)$,则映射族 $\{f,f^2,\cdots,f^n,\cdots\}$ 在 x 处是等度连续的。

证 明 对任意的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\min\{\varepsilon,\delta_0\}>0$,当 $d(y,x)<\delta$ 时,使得对任意的正整数 n, $d(f^n(y),f^n(x))\leqslant d(f^{n-1}(y),f^{n-1}(x))\leqslant d(y,x)<\varepsilon$,故映射族 $\{f,f^2,\cdots,f^n,\cdots\}$ 在 x 处是等度连续的。 □

由以上两定理可得如下推论。

推论 1 (X,f) 是一个混沌动力系统,则 f 在 X 上每一个点处都不是可压缩的。

推论 2 (X,f) 是一个混沌动力系统。则 f 不是一个压缩映射。

参考文献:

[1] 郑维行,王声望. 实变函数和泛函分析概论[M]. 北京:高等教育出版社,1989.

(编 辑 曹大刚)

A discussion on chaotic dynamic system

QU Han-zhang[1], SONG Guo-xiang[2]

(1. Department of Information and Automatic Control, Xi'an Institute of Post and Telecommunications, Xi'an 710061, China; 2. Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: Some properties on chaotic dynamic system are discussed; the set of the periodic points in the chaotic dynamic system and the set of the nonperiodic points in the chaotic dynamic system both are invariable under its mapping; it is concluded that its mapping can not be compressed mapping.

Key words: chaotic dynamic system; periodic point; nonperiodic point orbit